Folgen, Konvergenz und Reihen

4

Was ist eine reelle Folge?

Wie lautet das grundlegende Konzept des Grenzwertbegriffs?

Was unterscheidet Reihen von Folgen?

Teil II

L. Göllmann et al., *Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden*, DOI 10.1007/978-3-662-53867-8_4

Die Analysis ist neben der Algebra eine wesentliche Teildisziplin der Mathematik. Sie basiert auf einem zentralen Begriff, dem Grenzwert. Im Wesentlichen beschäftigt sich die Analysis dabei mit Aussagen über konkurrierende Grenzwertprozesse, die mit vielen Anwendungen in den Naturwissenschaften, insbesondere in der Physik, zu tun haben. Wir steigen ein mit dem Grenzwertbegriff für reelle Zahlenfolgen. Eine Zahlenfolge ist dabei eine unendliche Sequenz reeller Zahlen, worunter wir, vereinfacht ausgedrückt, eine unendliche Menge reeller Zahlen verstehen, deren Elemente wir abzählen, also durchnummerieren, können. Man spricht hierbei von einer diskreten mathematischen Struktur. Dies können beispielsweise die Ziffern (Stellen) einer Dezimalzahl sein oder eine Sequenz von Näherungslösungen einer Gleichung, die sich schrittweise der exakten Lösung immer weiter annähern. Uns interessiert dabei, ob sich bei diesen Zahlenfolgen eine Tendenz abzeichnet. Ist dies der Fall, so motiviert dies die Definition des Grenzwertes. Im nächsten Kapitel werden wir mithilfe des Grenzwertbegriffs für Zahlenfolgen den Grenzwert bei Funktionen einführen.

4.1 Reelle Folgen

Unter einer Folge reeller Zahlen verstehen wir eine Sequenz aus unendlich vielen reellen Zahlen, die beginnend mit einem Startindex fortlaufend durchnummeriert werden. Derartige Folgen begegnen uns im täglichen Leben. So könnte beispielsweise der wöchentliche Umsatz einer Firma mit einer Folge dargestellt werden:

Woche	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
Umsatz in €	12560	11700	10120	$\cdots$	a_n	$\cdots$

Üblicherweise würde man den Berichtswochenindex n für den entsprechenden Wochenumsatz a_n auf maximal 52 Wochen eines Jahres begrenzen. Es wäre aber auch denkbar, den Wochenindex über die Jahre hinweg weiterzuführen. Wir weisen somit einem Wochenindex $n \in \mathbb{N}$ einen Umsatz $a_n \in \mathbb{R}$ zu. So gilt nach der obigen Tabelle

$$a_1 = 12560, \; a_2 = 11700, \; a_3 = 10120, \; \dots$$

Eine Folge weist einer natürlichen Zahl eine reelle Zahl zu

Die Stellen a_k einer Dezimalzahl $z \in [0, 10)$ mit Vorkommateil a_0,

$$z = a_0.\, a_1\, a_2\, a_3\, \dots,$$

können wir ebenfalls als Folge interpretieren. In diesem Fall handelt es sich um eine Folge einstelliger natürlicher Zahlen $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ für jede Stelle $k \in \mathbb{N}_0$. In der Praxis beschränken wir uns dabei auf eine Darstellung mit einer endlichen Anzahl an Nachkommastellen, sodass wir in Kauf nehmen, die Zahl z in vielen Fällen nur näherungsweise darzustellen. Dies führt dazu, dass wir es dabei mit einer Ziffernfolge zu tun haben, die ab einer bestimmen Stelle, also nach einem bestimmten Index $k_0 \in \mathbb{N}_0$, abbricht, d. h. für die also $a_k = 0$ gilt, sobald $k > k_0$ ist. Aus dieser Ziffernfolge können wir dann die Zahl z (bei endlicher Stellenzahl k_0 evtl. nur näherungsweise) rekonstruieren:

$$z = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \approx \sum_{k=0}^{k_0} \frac{a_k}{10^k}.$$

So lautet beispielsweise die Zahl π auf sieben Nachkommastellen begrenzt:

$$\pi \approx 3.1415926.$$

In dieser Darstellung bricht die Ziffernfolge nach der Stelle $k_0 = 7$ ab. Dabei ist

$$\begin{aligned} &a_0 = 3, \; a_1 = 1, \; a_2 = 4, \; a_3 = 1, \; a_4 = 5, \; a_5 = 9, \\ &a_6 = 2, \; a_7 = 6, \\ &a_k = 0, \quad \text{für} \quad k > 7 \end{aligned}$$

und somit

$$\pi \approx \sum_{k=0}^{7} \frac{a_k}{10^k}.$$

Das Aufsummieren von Werten einer Folge reeller Zahlen ist ein in der Praxis häufig auftretendes Konzept. So ist es beispielsweise sinnvoll, die Wochenumsätze einer Firma zu kumulieren, um über einen bestimmten Berichtszeitraum, etwa über ein Jahr, den Gesamtumsatz zu bestimmen. Wir werden auf Zahlenfolgen basierende Summen später als sog. Reihen einführen und einer gesonderten Betrachtung unterziehen. Zunächst definieren wir den Folgenbegriff einmal exakt.

Definition: Reelle Folge

Eine Abbildung

$$\begin{aligned} a_n : \mathbb{N}_0 &\to \mathbb{R}, \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

heißt Folge reeller Zahlen oder Folge in $\mathbb{R}$. Jedem $n \in \mathbb{N}_0$ wird demnach ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Ebenso wird auch in Verallgemeinerung dieser Definition für einen beliebigen Startindex $m \in \mathbb{N}_0$ die Abbildung

$$\begin{aligned} a_n : \{n \in \mathbb{N}_0 \,|\, n \geq m\} &\to \mathbb{R}, \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

als Folge bezeichnet.

Für eine Folge a_n existieren mehrere Schreibweisen:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \quad \text{oder kurz} \quad (a_n)_n \quad \text{oder} \quad (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

bzw. bei Startindex m

$$(a_n)_{n \geq m} \quad \text{oder kurz} \quad (a_n)_n \quad \text{oder} \quad (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots).$$

Wenn der Zusammenhang die Erwähnung des Startindex nicht explizit erfordert, kann allgemein auch mit $(a_n)_n$ oder (a_n) eine Folge bezeichnet werden.

Einen konkreten Wert a_n bezeichnet man als Folgenglied, die Zahl n als Index (Plural: Indizes).

Beispiele

1. Es sei $w \in \mathbb{R}$ und $a_n := w$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann stellt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (w, w, w, \ldots)$ eine konstante Folge dar.
2. $a_n := n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (0, 1, 2, 3, \ldots)$.
3. $a_n := \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$, also $(a_n)_{n\geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$. Die Folgenglieder werden immer kleiner, erreichen jedoch nicht die 0. Die Menge der Folgenglieder ist also durch 0 nach unten beschränkt, was zugleich ihre größte untere Schranke darstellt.
4. $a_n := (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dies ergibt eine alternierende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, -1, 1, -1, \ldots)$.
5. $a_n := \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, für $n \in \mathbb{N}_0$, also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots)$. Die Folgenglieder werden stets größer, erreichen jedoch nicht die Zahl 1. Die Menge der Folgenglieder ist demnach durch 1 nach oben beschränkt, wobei dies zugleich die kleinste obere Schranke darstellt.
6. $a_n := \frac{n^2}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, also
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(\frac{0^2}{2^0} = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \frac{36}{64} \ldots\right).$$
Die Folgenglieder werden zunächst größer und fallen dann wieder.
7. Die mithilfe der beiden Anfangswerte $a_0 := 1$ und $a_1 := 1$ rekursiv definierte Folge
$$a_{n+2} := a_{n+1} + a_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$
heißt **Fibonacci-Folge**. Sie beschreibt einige Wachstumsprozesse in der Natur. Ihre Folgenglieder lauten
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots).$$ ◄

Rekursiv definierte Folgen wie die Fibonacci-Folge benötigen neben der Rekursionsvorschrift zur Berechnung eines Folgengliedes aus einem oder mehreren Vorgängergliedern auch Anfangswertvorgaben. Betrachten wir ein einfacheres Beispiel. Die Rekursionsvorschrift

$$a_n := a_{n-1} + 2n - 3, \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.1}$$

liefert zusammen mit der Anfangswertvorgabe

$$a_0 := 0$$

die Folgenglieder

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (0, -1, 0, 3, 8, 15, 24, \ldots).$$

Es stellt sich nun die Frage, ob es ein Bildungsgesetz für die Folgenglieder in geschlossener Form gibt, sodass wir das Folgenglied a_n nur aus dem vorgegebenen Index $n \in \mathbb{N}_0$ berechnen können. In der Tat gibt es für diese Folge ein derartiges Bildungsgesetz. Es gilt nämlich

$$a_n = n^2 - 2n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.2}$$

Wir verifizieren dieses Gesetz einmal für die ersten sieben Folgenglieder. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0^2 - 2 \cdot 0 = 0,\\
a_1 &= 1^2 - 2 \cdot 1 = -1,\\
a_2 &= 2^2 - 2 \cdot 2 = 0,\\
a_3 &= 3^2 - 2 \cdot 3 = 3,\\
a_4 &= 4^2 - 2 \cdot 4 = 8,\\
a_5 &= 5^2 - 2 \cdot 5 = 15,\\
a_6 &= 6^2 - 2 \cdot 6 = 24.
\end{aligned}$$

Nun ist dies kein Beweis für die allgemeine Gültigkeit der Formel (4.2). Wir haben allerdings die Möglichkeit, diese Formel auf recht elegante und einfache Art nachzuweisen. Hierzu zeigen wir die Formel zunächst für einen Anfangsindex durch Nachrechnen. Dies haben wir mit der obigen Verifikation sogar bis zum Index $n = 6$ schon erledigt. Wenn wir nun für den Folgeindex $n = 7$ die Formel nachweisen möchten, so können wir nun statt des direkten Einsetzens alternativ auch den Nachweis auf die bereits zuvor gezeigte Formel für $n = 6$ zurückführen. Hierzu bestimmen wir a_7 zunächst nach der Rekursionsvorschrift (4.1) und setzen für a_6 den Term der zuvor gezeigten Formel ein:

$$\begin{aligned}
a_7 &\overset{(4.1)}{=} a_6 + 2 \cdot 7 - 3\\
&\overset{(4.2)}{=} 6^2 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 - 3\\
&= 6^2 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 2 - 3\\
&= 6^2 + 2 \cdot 6 - 2 \cdot 6 - 1\\
&= 6^2 + 2 \cdot 6 + 1 - 2 \cdot 6 - 2\\
&= (6 + 1)^2 - 2 \cdot (6 + 1) = 7^2 - 2 \cdot 7.
\end{aligned}$$

Das Bildungsgesetz (4.2) gilt also auch für $n = 7$. Diesen Nachweis können wir jetzt in analoger Weise auf $n = 8$ übertragen, um die Gültigkeit der Formel (4.2) für $n = 8$ basierend auf der soeben nachgewiesenen Formel (4.2) für $n = 7$ zu beweisen. Es ist nun sinnvoll, dieses Vorgehen zu schematisieren. Mit dem bereits erfolgten Nachweis der Formel für den Anfangsindex $n = 0$ ist die folgende Aussage wahr:

$$\text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } a_n = n^2 - 2n. \tag{4.3}$$

Wir zeigen, dass hierauf basierend die entsprechende Aussage auch für den Index $n + 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &\overset{(4.1)}{=} a_n + 2 \cdot (n + 1) - 3\\
&\overset{(4.3)}{=} n^2 - 2 \cdot n + 2 \cdot (n + 1) - 3\\
&= n^2 - 2 \cdot n + 2 \cdot n + 2 - 3\\
&= n^2 + 2 \cdot n - 2 \cdot n - 1\\
&= n^2 + 2 \cdot n + 1 - 2 \cdot n - 2\\
&= (n + 1)^2 - 2 \cdot (n + 1).
\end{aligned}$$

Dies ist ein generischer Beweis, mit dem die Formel (4.2) nun auch für alle $n \geq 1$ nachgewiesen werden kann. Dieses Nachweisprinzip wird als Beweisverfahren durch vollständige Induktion bezeichnet. Der Nachweis der Behauptung für einen Anfangswert, hier bereits durch durch den Nachweis der Formel für $n = 0$ gegeben, wird als Induktionsanfang bezeichnet. Dieser Nachweis berechtigt dann zur Formulierung der Induktionsvoraussetzung (4.3). Die Induktionsvoraussetzung ist nicht die Behauptung! Der entscheidende Unterschied ist, dass die Behauptung die Formel für alle $n \in \mathbb{N}_0$ qualifiziert, während in der Induktionsvoraussetzung nur davon die Rede ist, dass es (mindestens) ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, für das die Formel gültig ist.

4.2 Konvergenz, Grenzwerte und Divergenz

Das Beispiel der Kehrwertfolge $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ zeigt, dass sich für gewisse Folgen langfristige Tendenzen abzeichnen. Die Werte dieser Folge werden immer kleiner, bleiben dabei jedoch positiv und streben der Zahl 0 zu, ohne sie zu erreichen. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Ziffern zur Dezimaldarstellung der Zahl π, begrenzt auf sieben Nachkommastellen, zeigt in den ersten acht Folgengliedern keine Tendenz. Danach bricht die Folge in dem Sinne ab, dass sämtliche weitere Stellen auf 0 gesetzt sind, dass also $a_n = 0$ gilt für $n > 7$. Jede näherungsweise Darstellung der Zahl π mit einer endlichen Anzahl von Dezimalstellen hat also die Eigenschaft, dass sich langfristig die Zahl 0 einstellt für die Werte der einzelnen Folgenglieder. Diese Folge hätte damit ebenfalls die Eigenschaft, dass die Folgenglieder der Zahl 0 zustreben. Im Unterschied zur Kehrwertfolge wird die Zahl Null dabei sogar durch die Folgenglieder angenommen und bleibt konstant auf diesem Wert. Der Versuch, die Zahl π durch unendlich viele Dezimalstellen exakt darzustellen, zeigt jedoch, dass sich keine Tendenz in den Folgengliedern der Ziffernfolge einstellt.

Der Grenzwertbegriff ist ein zentrales Konzept der Analysis

Wenn das langfristige Verhalten der Werteentwicklung dazu führt, dass die Folgenglieder auf eine bestimmte reelle Zahl a zustreben, wird von **Konvergenz** gesprochen. Dabei ist unerheblich, ob dieser **Grenzwert** a durch einzelne Werte der Folge angenommen wird, also im Wertebereich der Folge liegt, oder nicht. Die Konvergenz einer Folge (a_n) bedeutet demnach die Existenz eines Grenzwertes $a \in \mathbb{R}$, auf den die Folgenglieder bei wachsendem Index n zustreben. Wir kommen nicht umhin, dieses Phänomen mathematisch präzise zu definieren.

Definition: Konvergenz einer reellen Folge

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\geq m}$ heißt **konvergent** gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, falls der Unterschied $|a_n - a|$ der Folgenglieder zum Wert a beliebig klein wird, und zwar für alle Indizes n, die hinreichend groß gewählt werden. Mathematisch exakt wird dieser Sachverhalt wie folgt ausgedrückt: Zu jeder (Toleranzschwelle) $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0.$$

Der Wert a wird als Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq m}$ bezeichnet. Hierzu existieren die Schreibweisen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$$

(gesprochen „Der Limes von $(a_n)_{n\geq m}$ ist a“ bzw. „$(a_n)_{n\geq m}$ geht gegen a“). Konvergiert eine Folge gegen den Wert $a = 0$, so wird sie auch als **Nullfolge** bezeichnet. Eine reelle Folge heißt **divergent**, wenn sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

Der Index n_0 ist natürlich nicht eindeutig bestimmt, denn mit seiner Existenz gibt es unendlich viele Indizes, ab denen die obige Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt. Es wird in dieser Definition auch nicht verlangt, dass n_0 der kleinste Index ist, für welchen diese Ungleichung erfüllt sein soll.

Der Begriff der Konvergenz einer reellen Folge kann auch alternativ formuliert werden: Der Abstand $|a_n - a|$ ist höchstens für endlich viele Folgenglieder größer oder gleich einer beliebigen, zuvor festgelegten positiven Toleranzschwelle $\varepsilon > 0$. Das heißt, eine Folge (a_n) konvergiert gegen a genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge der Folgenglieder, deren Abstand zu a größer oder gleich ε ist, eine endliche Menge darstellt:

$$|\{a_n \mid |a_n - a| \geq \varepsilon\,, n \geq m\}| < \infty.$$

Für $\varepsilon > 0$ bezeichnet man das offene Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ als ε-Umgebung (Epsilon-Umgebung) von a. Mit diesem Begriff kann die Konvergenz sehr anschaulich und prägnant formuliert werden: Eine Folge konvergiert genau dann gegen den Wert $a \in \mathbb{R}$, wenn *fast alle* Folgenglieder innerhalb jeder ε-Umgebung von a liegen, wenn also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ existiert mit

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0.$$

Die Ausdrucksweise „fast alle“ bedeutet dabei „mit Ausnahme höchstens endlich vieler“ und wird in dieser oder vergleichbaren Situationen in der Mathematik oftmals verwendet.

Beispiele reeller Folgen

1. Die konstante Folge $a_n := 7$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ konvergiert trivialerweise gegen 7. Formale Begründung: Für beliebiges $\varepsilon > 0$ hat man $|a_n - 7| = |7 - 7| = 0 < \varepsilon$ sogar für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
2. $a_n := \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$. Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, denn für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt $|a_n - 0| = |a_n| = |\frac{1}{n}| \overset{n\geq 0}{=} \frac{1}{n} <$

4.1 Mathematischer Hintergrund: Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Das Verfahren der **vollständigen Induktion** stellt eines der grundlegenden Beweisprinzipien in der diskreten Mathematik dar. Es ist dort anwendbar, wo eine Aussage in Abhängigkeit einer natürlichen Zahl n steht. Wir zeigen dabei zunächst, dass die Aussage für einen Startindex n_0 gültig ist. Wir wissen dann, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, für das die Aussage Gültigkeit besitzt und zeigen dann, dass die Aussage auch für den Folgeindex $n + 1$ gelten muss. Damit ist die Gültigkeit der Aussage für alle $n \geq n_0$ nachgeweisen. Wir skizzieren das Beweisschema nun formal im Detail. Es sei $\mathcal{A}(n)$ eine Aussage, die abhängig ist von einem ganzzahligen Parameter n. Es soll nun die Gültigkeit dieser Aussage für alle $n \geq n_0$ gezeigt werden. Wir beginnen mit dem Induktionsanfang: Hier wird die Aussage $\mathcal{A}(n)$ für den Startindex $n = n_0$, den man damit als natürliche Zahl fest vorgibt, durch Einsetzen gezeigt. Es wird also die Aussage $\mathcal{A}(n_0)$ nachgewiesen. Der Induktionsanfang berechtigt dann zur Formulierung der Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein ganzzahliges $n \geq n_0$ für das die Aussage $\mathcal{A}(n)$ gilt.

Nun erfolgt der eigentliche Beweisprozess, der Induktionsschritt: Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung wird gezeigt, dass die Aussage auch für den Folgeindex $n + 1$ gültig ist. Wir können uns diese Vorgehensweise wie das Besteigen einer Leiter vorstellen. Wenn wir also wissen, wie wir von einer Stufe einer Leiter auf die Folgestufe gelangen, und uns im Vorfeld bekannt ist, wie wir auf die erste Sprosse kommen, dann können wir prinzipiell die ganze Leiter erklimmen. Insgesamt folgt so aus der Gültigkeit der Aussage $\mathcal{A}(n_0)$ die Gültigkeit der Aussagen $\mathcal{A}(n_0 + 1)$, $\mathcal{A}(n_0 + 2)$, $\mathcal{A}(n_0 + 3), \ldots$, womit die Aussage $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$ gültig ist.

In den meisten Fällen liegt die eigentliche Beweisarbeit in dem Induktionsschritt. Hierbei ist es wichtig, dass eine Situation erzeugt wird, auf welche die Induktionsvoraussetzung, also die Gültigkeit von $\mathcal{A}(n)$ für ein $n \geq n_0$, anwendbar ist. Der Induktionsanfang, also der Nachweis der Gültigkeit einer Behauptung durch Einsetzen eines Startindex n_0, ist in der Regel die leichteste Aufgabe in einem Induktionsbeweis. Es gibt jedoch auch Beispiele in der Mathematik, wo gerade dies der schwerere Teil ist, während der Induktionsschritt trivial ist. Dies ist jedoch die Ausnahme.

$\varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n$. Wählt man also eine natürliche Zahl $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, so gilt $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

3. $a_n := \frac{2n+1}{n}$ für $n \geq 1$, also $(a_n)_{n\geq 1} = (3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \ldots, \frac{2001}{1000}, \ldots)$. Offenbar konvergiert diese Folge gegen den Wert $a = 2$, wobei sämtliche Folgenglieder größer als a sind. Um die Konvergenz zu zeigen, bildet man auch in diesem Fall die Abstandsfolge
$$|a_n - a| = \left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \left|2 + \frac{1}{n} - 2\right| = \frac{1}{n}.$$
Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt nun
$$|a_n - a| = \left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$
Die Argumentation des vorangegangenen Beispiels wiederholt sich damit an dieser Stelle, und die Konvergenz $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 2$ ist somit gezeigt.
Da die Konvergenz $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ bereits gezeigt wurde, kann aber hier auch formal kürzer argumentiert werden:
$$|a_n - a| = \left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \left|2 + \frac{1}{n} - 2\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$
Die folgende Bemerkung verallgemeinert diesen Sachverhalt. ◀

Es sei nun $(b_n)_n$ eine Nullfolge reeller Zahlen und $(a_n)_n$ eine reelle Folge. Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ derart, dass fast alle Glieder der Abstandsfolge $|a_n - a|$ nicht größer sind als die Beträge der Folgenglieder von $(b_n)_n$, also $|a_n - a| \leq |b_n|$ für alle $n \geq k_0$ ab einem $k_0 \in \mathbb{N}_0$, so konvergiert $(a_n)_n$ gegen a.

Merkregel

Lässt sich $|a_n - a|$ gegen eine Nullfolge nach oben abschätzen, so konvergiert a_n gegen a:
$$|a_n - a| \leq \text{Nullfolge} \Longrightarrow a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$$

Beispiele für divergente Folgen

1. $a_n = n$, für $n \in \mathbb{N}_0$. Formale Begründung: Gäbe es $a \in \mathbb{R}$ mit
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$
so gäbe es für $\varepsilon = 1 > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass für $n \geq n_0$ gilt
$$|a_n - a| < 1.$$
Damit gilt für alle $n \geq n_0$
$$|n - a| < 1 \quad \text{bzw.} \quad -1 < n - a < 1,$$
woraus insbesondere $n < 1 + a$ folgt, was für $n \geq 1 + a$ allerdings zum Widerspruch führt.

Teil II

2. $a_n = (-1)^n$, für $n \in \mathbb{N}_0$. Formale Begründung: Gäbe es $a \in \mathbb{R}$ mit
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,$$
so gäbe es für $\varepsilon = 1 > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit
$$|a_n - a| < 1 \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0. \tag{4.4}$$
Es gilt dann für $n \geq n_0$:
$$\begin{aligned} 2 &= |(-1)^n| |-2| = |(-1)^n| |-1-1| \\ &= |(-1)^n(-1-1)| \\ &= |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = |a_{n+1} - a_n| \\ &= |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \\ &\leq \underbrace{|a_{n+1} - a|}_{<1,\text{ wg. (4.4)}} + \underbrace{|a_n - a|}_{<1,\text{ wg. (4.4)}} \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &< 1 + 1 = 2 \\ &\Longrightarrow 2 < 2. \quad \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$
◄

4.3 Beschränktheit und Monotonie

Oftmals ist es von Interesse zu wissen, ob sich die Glieder einer Folge innerhalb bestimmter Schranken bewegen oder ob sie jede obere bzw. untere Schranke durchbrechen. Basierend auf dem Beschränktheitsbegriff für Mengen definieren wir zunächst einen entsprechenden Begriff für Folgen.

Definition: Beschränktheit einer Folge

Eine reelle Folge $(a_n)_{n\geq m}$ heißt nach oben beschränkt, wenn die Menge aller Folgenglieder (Wertemenge) $\{a_n \,|\, n \geq m\}$ nach oben beschränkt ist, d. h., wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq K$ für alle $n \geq m$.

In analoger Weise nennt man $(a_n)_{n\geq m}$ nach unten beschränkt, wenn die Menge aller Folgenglieder nach unten beschränkt ist, d. h., wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, mit $a_n \geq K$ für alle $n \geq m$.

Die Folge $(a_n)_n$ heißt beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, d. h. wenn es ein $M \geq 0$ gibt mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \geq m$.

Wir kommen nun zu einem einfachen, aber wichtigen ersten Resultat.

Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis Konvergiert eine Folge $(a_n)_{n\geq m}$, so gibt es eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ sowie ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:
$$1 > |a_n - a| \geq |a_n| - |a| \iff |a_n| < 1 + |a|.$$
Damit gilt für $M = \max(1 + |a|, |a_m|, |a_{m+1}|, \ldots, |a_{n_0-1}|)$
$$|a_n| \leq M \quad \text{für alle} \quad n \geq m.$$
■

Die Umkehrung des letzten Satzes gilt nicht. Es gibt beschränkte Folgen, die nicht konvergieren, wie das Beispiel der alternierenden Folge $a_n = (-1)^n$ zeigt. Die Kontraposition des Satzes kann sich aber als nützliches Hilfsmittel erweisen, um die Divergenz bestimmter Folgen zu zeigen, denn falls eine Folge nicht beschränkt ist, wenn also ihre Folgenglieder über jede Schranke wachsen oder unter jede Schranke fallen, dann kann sie aufgrund des vorangegangenen Satzes nicht konvergieren.

Wie verändern sich die Werte a_n einer reellen Folge bei steigendem Index n? Wenn mit dem Index n eine wachsende oder fallende Werteentwicklung einhergeht, sprechen wir von monotonen Folgen. Wir definieren diesen Begriff exakt.

Definition: Monotonie einer reellen Folge

Eine Folge $(a_n)_{n\geq m}$ in $\mathbb{R}$ heißt

- monoton wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1}$;
- streng monoton wachsend, falls $a_n < a_{n+1}$;
- monoton fallend, falls $a_n \geq a_{n+1}$;
- streng monoton fallend, falls $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \geq m$ gilt.

Für den Begriff „(streng) monoton wachsend“ gibt es auch die Sprechweise „(streng) monoton steigend“.

Streng wachsende Monotonie zieht wachsende Monotonie nach sich, streng fallende Monotonie zieht fallende Monotonie nach sich. Streng monoton wachsende Folgen sind beispielsweise

1. $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}_0$,
2. $a_n = n^k$, $n \in \mathbb{N}_0$, wobei der Exponent $k \geq 1$ zuvor festgelegt wird.

Ein negativer Vorfaktor macht aus diesen Folgen hingegen streng monoton fallende Folgen. Eine konstante Folge $a_n = w$ mit $w \in \mathbb{R}$ ist sowohl monoton fallend als auch monoton wachsend. Beispiele für nichtmonotone Folgen sind:

1. $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, da $(a_n)_n = (0, \frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \ldots)$.
2. $a_n = n^2 - 2n$, $n \in \mathbb{N}_0$, da $(a_n)_n = (0, -1, 0, 3, 8, 15, 24 \ldots)$.

Wie wir gesehen haben, ist die Beschränktheit einer Folge nicht hinreichend für ihre Konvergenz. In Kombination mit der Monotonie allerdings ergibt die Beschränktheit die Konvergenz.

Satz: Konvergenz beschränkt-monotoner Folgen

Jede Folge in $\mathbb{R}$, die beschränkt und monoton ist, konvergiert gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$.

Dieser Satz ist eine Konsequenz der Vollständigkeit der reellen Zahlen (vgl. Hintergrundbox 4.2). Wir werden allerdings erst am Ende dieses Kapitels diesen Sachverhalt zeigen.

Bestimmt divergente Folgen wachsen über oder fallen unter jede Schranke

Eine divergente Folge kann also nicht gleichzeitig monoton und beschränkt sein. Dies zeigt beispielsweise die alternierende Folge $a_n = (-1)^n$, die zwar beschränkt, aber nicht monoton ist, bzw. die Folge $a_n = n^k$ mit $k \geq 1$, die zwar monoton, aber nicht beschränkt ist.

Definition: Bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$

Eine reelle Folge $(a_n)_n$ heißt bestimmt divergent gegen ∞ (bzw. gegen $-\infty$), wenn es zu jeder Schranke $K \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$a_n > K \quad (\text{bzw. } a_n < K) \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad (\text{bzw. } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty).$$

Folgen, die durch reelle Polynome vom Grad ≥ 1 definiert sind, stellen Beispiele für bestimmt gegen $\pm\infty$ divergierende Folgen dar.

Wachstumsverhalten von Polynomfolgen

Es sei

$$p(x) := b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

ein Polynom des Grades $k \geq 1$ mit Koeffizienten $b_k, \ldots, b_0 \in \mathbb{R}$ und $b_k \neq 0$. Dann ist die durch

$$a_n := p(n) = b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0$$

definierte Folge $(a_n)_n$ bestimmt divergent gegen $\pm\infty$; genauer gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{bei positivem Leitkoeffizienten } b_k > 0$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \text{bei negativem Leitkoeffizienten } b_k < 0.$$

Diesen Sachverhalt können wir uns sehr leicht klarmachen, indem wir für $n > 0$ die Potenz n^k ausklammern:

$$\begin{aligned} a_n &= b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \\ &= n^k \left(b_k + \tfrac{b_{k-1}}{n} + \cdots + \tfrac{b_1}{n^{k-1}} + \tfrac{b_0}{n^k} \right). \end{aligned}$$

Die in der Klammer auftretenden Brüche stellen für $n \to \infty$ Nullfolgen dar, sodass in Abhängigkeit vom Vorzeichen des Leitkoeffizienten b_k die Folge bestimmt divergent gegen ∞ oder $-\infty$ ist. Wir haben bei dieser Argumentation aber stillschweigend davon Gebrauch gemacht, dass wir das Konvergenzverhalten eines Terms durch Betrachtung des Konvergenzverhaltens von Termbestandteilen bestimmen können. Eine detaillierte Untersuchung des Konvergenzverhaltens von Folgen, die sich aus mehreren Bestandteilen zusammensetzen, erfolgt erst im nächsten Abschnitt.

Der Satz besagt also, dass Polynomfolgen, die nicht gerade konstant sind, d. h. vom Grad ≥ 1 sind, stets bestimmt gegen $\pm\infty$ divergieren, wobei das Vorzeichen des Leitkoeffizienten entscheidet, ob $\lim a_n = \infty$ oder $\lim a_n = -\infty$ vorliegt. So ist beispielsweise die Folge

$$a_n = 0.00001 \cdot n^3 - 1000^{1000}n^2 - 10000^{10000}n - 100000^{100000}$$

bestimmt divergent gegen ∞, obwohl zu Beginn die Folgenglieder negativ sind und zunächst immer weiter abfallen. Es gibt hier aber ein $n_+ \in \mathbb{N}_0$, sodass sich der positive Summand $0.00001 \cdot n^3$ gegenüber den negativen Summanden $-1000^{1000}n^2 - 10000^{10000}n - 100000$ betragsmäßig durchsetzt, d. h.

$$0.00001 \cdot n^3 > 1000^{1000}n^2 + 10000^{10000}n + 100000^{100000}$$

für alle $n \geq n_+$.

Es ist zu erwarten, dass ein derartiges n_+ schon einen ausgesprochen großen Wert annehmen muss.

4.4 Eigenschaften konvergenter Folgen

Die Definition des Grenzwertes einer konvergenten Folge ergibt leider kein Verfahren zur konkreten Bestimmung des Grenzwertes. Nützlich sind daher Regeln, nach denen sich der Grenzwert einer konvergenten Folge anhand der Grenzwerte von Termbestandteilen berechen lässt.

Konvergente Folgen lassen Rechenregeln für Grenzwerte zu

Satz: Summe konvergenter Folgen

Es seien $(a_n)_n$ sowie $(b_n)_n$ zwei konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert auch die Summenfolge $(c_n)_n$ definiert durch $c_n = a_n + b_n$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Teil II

Konvergieren also die zwei Summanden, so konvergiert die Summenfolge gegen die Summe der Grenzwerte beider Summanden. Mit anderen Worten: Das lim-Symbol darf in die Summe gezogen werden.

Beweis Es seien

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad b = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Wir zeigen die Konvergenz der Summenfolge anhand der Definition. Es sei also ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da beide Summandenfolgen konvergieren, gibt es $n_a, n_b \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq n_a, \\ |b_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq n_b. \end{aligned}$$

Es folgt hiermit

$$\begin{aligned} |c_n - (a+b)| &= |a_n + b_n - (a+b)| \\ &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq \underbrace{|(a_n - a)|}_{<\frac{\varepsilon}{2},\text{ für } n\geq n_a} + \underbrace{|(b_n - b)|}_{<\frac{\varepsilon}{2},\text{ für } n\geq n_b} \quad \text{(Dreiecksungl.)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{für} \quad n \geq n_0 := \max(n_a, n_b), \end{aligned}$$

also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $|c_n - (a+b)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Die Summenfolge c_n konvergiert also gegen die Summe $a + b$ der Grenzwerte ihrer Summanden. ■

Mit einer ähnlichen Argumentation kann der folgende Satz gezeigt werden.

Satz: Produkt konvergenter Folgen

Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert auch die Produktfolge $(c_n)_n$ definiert durch $c_n = a_n \cdot b_n$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Konvergieren also die zwei Faktoren, so konvergiert die Produktfolge gegen das Produkt der Grenzwerte beider Faktoren. Das lim-Symbol darf in das Produkt gezogen werden.

Der Beweis sei als Übung empfohlen. Hinweis: Als konvergente Folge ist (a_n) beschränkt; es gilt also $|a_n| \leq K$ für fast alle n mit einer Schranke $K > 0$. Wir können dabei K so groß wählen, dass $K > |\lim b_n|$ gilt. Zudem ist mit $a = \lim a_n$ und $b = \lim b_n$ die Zerlegung

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$$

hilfreich. Durch geschicktes Ausklammern und Anwenden der Dreiecksungleichung kann dann gezeigt werden, dass für $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$ für fast alle n gilt.

Folgerung

Für zwei konvergente reelle Folgen $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ und jede beliebige Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. Die Folge $(\lambda a_n)_n$ ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Ein konstanter Faktor kann also vor das lim-Symbol gezogen werden.
2. Die Folge $(a_b - b_n)_n$ ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. ◀

Die erste Aussage folgt aus dem Satz über das Produkt konvergenter Folgen, denn ein konstanter Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ kann als konstante Folge $b_n = \lambda$ betrachtet werden. Die zweite Aussage folgt aus der ersten Aussage mit $\lambda = -1$ und dem Satz über die Summe konvergenter Folgen, da $a_n - b_n = a_n + (-1 \cdot b_n)$.

Das Produkt konvergenter Folgen ist wieder konvergent, allerdings braucht eine konvergente Folge, die ein Produkt von Folgen ist, keine konvergenten Faktoren zu haben. Beispielsweise ist die Folge

$$\left(n \cdot \frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$$

eine Nullfolge. Von den beiden Faktoren n und $\frac{1}{n^2}$ konvergiert aber die erste Faktorfolge $(n)_{n\geq 1}$ nicht, dafür aber der zweite Faktor $(\frac{1}{n^2})_{n\geq 1}$ umso schneller gegen 0.

Die Sätze über die Summe bzw. das Produkt konvergenter Folgen und die Möglichkeit des Herausziehens eines konstanten reellen Faktors vor das lim-Symbol bei einer konvergenten Folge können formal auch wie folgt ausgedrückt werden: Die Menge aller konvergenten Folgen ist bzgl. der gliedweisen Addition bzw. gliedweisen Multiplikation abgeschlossen, d. h., Summe und Produkt konvergenter Folgen sind ihrerseits wieder konvergente Folgen.

Die Betrachtung des Kehrwertes einer Folge bedarf etwas größerer Aufmerksamkeit.

Satz: Kehrwert einer konvergenten Nichtnullfolge

Es sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge reeller Zahlen, deren Grenzwert nicht verschwindet, d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Dann gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. Es ist $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Wir sagen dann, „fast alle" Folgenglieder sind ungleich 0, bzw. es „verschwinden höchstens endlich viele" Folgenglieder von $(a_n)_n$.
2. Die Kehrwertfolge $(\frac{1}{a_n})_{n\geq n_0}$ konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}.$$

Teil II

Das lim-Symbol darf also in den Nenner gezogen werden, oder – anders ausgedrückt – Grenzwertbildung und Kehrwertbildung von a_n sind miteinander vertauschbar.

Beweis Da es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $(a_n)_n \xrightarrow{n\to\infty} a \neq 0$, existiert für $\varepsilon = |a| > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $|a_n - a| < \varepsilon = |a|$ für alle $n \geq n_0$, anders formuliert

$$-|a| < a_n - a < |a| \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0,$$

also

$$a - |a| < a_n < |a| + a \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0.$$

Ist $a > 0$, so folgt aus der linken Ungleichung $a - |a| = a - a = 0 < a_n$, dass $a_n > 0$ ist für alle $n \geq n_0$. Für negatives $a < 0$ folgt aus der rechten Ungleichung $a_n < |a| + a = -a + a = 0$, dass $a_n < 0$ ist für alle $n \geq n_0$. In jedem Fall ist $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, sodass die Kehrwertfolge $(\frac{1}{a_n})_{n \geq n_0}$ definiert ist. Die Folge $a_n \cdot a$ konvergiert nach der letzten Folgerung gegen $a^2 > 0$. Für fast alle n gilt damit nach analoger Argumentation $a_n a > 0$. Mit $\varepsilon < a^2$ gilt sogar für fast alle n die Ungleichung $a_n a > a^2 - \varepsilon > 0$, denn es ist $|a_n a - a^2| < \varepsilon$ bzw. $-\varepsilon < a_n a - a^2 < \varepsilon$ für fast alle $n \geq n_0$, woraus insbesondere $a^2 - \varepsilon < a_n a$ folgt. Daher gibt es ein $K > 0$ mit $a_n a > K > 0$ für fast alle $n \geq n_0$. In dieser Situation gilt nun

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a \cdot a_n}\right| = |a_n - a| \frac{1}{|a_n a|} < |a_n - a| \frac{1}{K} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

d. h., $|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}|$ ist nach oben für fast alle $n \geq n_0$ durch eine Nullfolge begrenzt, $\frac{1}{a_n}$ konvergiert also gegen $\frac{1}{a} = \frac{1}{\lim a_n}$. ■

Ist eine Folge $(a_n)_n$ bestimmt divergent gegen $\pm\infty$, so konvergiert die ab einem Index n_0 mit $a_{n_0} \neq 0$ definierte Kehrwertfolge $(\frac{1}{a_n})_{n \geq n_0}$ gegen 0.

Während der Kehrwert einer bestimmt gegen $\pm\infty$ divergierenden Folge eine Nullfolge definiert, braucht der Kehrwert einer Nullfolge aber nicht bestimmt gegen ∞ oder $-\infty$ zu divergieren, wie an der Folge $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$ zu erkennen ist.

Kombiniert man den Satz über das Produkt konvergenter Folgen mit dem Satz über den Kehrwert einer konvergenten Nichtnullfolge, so kann man etwas allgemeiner formulieren:

Satz: Quotient konvergenter Folgen

Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen, wobei der Grenzwert von $(b_n)_n$ nicht verschwindet, d. h. $\lim b_n \neq 0$. Dann gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{R}$, sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1. Es ist $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$.
2. Die Quotientenfolge $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq 0}$ konvergiert, und ihr Grenzwert ist der Quotient der Einzelgrenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Die letzten Sätze liefern im Prinzip Aussagen über die Vertauschbarkeit von Grenzwertprozessen mit elementaren arithmetischen Operationen. Diese Sachverhalte mögen zwar wie Selbstverständlichkeiten erscheinen, dennoch gibt es Situationen, in denen Grenzwertprozesse nicht mit bestimmten mathematischen Operationen vertauscht werden dürfen. Wir werden später sehen, dass der Stetigkeitsbegriff bei Funktionen exakt auf dieser Vertauschbarkeit beruht bzw. diese zum Inhalt hat. Ebenfalls selbstverständlich mutet der folgende Sachverhalt an:

Satz: Schwache Monotonie des Grenzwertes

Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \leq b_n$ für $n \geq n_0$, also für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann darf auf beiden Seiten dieser Ungleichung das lim-Symbol gesetzt werden, d. h., es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Die Grenzwerte unterliegen damit ebenfalls dieser Ungleichung.

Beweis Nimmt man an, dass für die Grenzwerte nicht die Ungleichung erfüllt ist, also $\lim a_n > \lim b_n$, dann gibt es aufgrund der Konvergenz von $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ für $\varepsilon = \lim a_n - \lim b_n > 0$ zwei Indizes $n_a, n_b \in \mathbb{N}_0$ mit

$$|a_n - \lim a_n| < \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\lim a_n - \lim b_n}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq n_a,$$
$$|b_n - \lim b_n| < \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\lim a_n - \lim b_n}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq n_b.$$

Insbesondere folgt:

$$a_n - \lim a_n > -\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\lim b_n - \lim a_n}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq n_a,$$
$$b_n - \lim b_n < \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\lim a_n - \lim b_n}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq n_b.$$

Hieraus ergibt sich

$$a_n > \frac{\lim b_n + \lim a_n}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq n_a,$$
$$b_n < \frac{\lim a_n + \lim b_n}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq n_b.$$

Verketten wir diese Ungleichungen, so folgt für alle $n \geq \max(n_a, n_b)$:

$$a_n > \frac{\lim b_n + \lim a_n}{2} > b_n,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$ steht. ■

Schließlich sei noch warnend auf einen möglichen Fehlschluss hingewiesen: Wird für die Folgenglieder die strenge Ungleichung $a_n < b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}_0$ vorausgesetzt, so braucht die strenge Ungleichung nicht auch für die Grenzwerte zu gelten, sondern allenfalls $\lim a_n \leq \lim b_n$, wie das einfache Beispiel $a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$ bereits zeigt.

Achtung Sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$, so folgt aus der strengen Ungleichung $a_n < b_n$ nach Grenzübergang $n \to \infty$ nur die schwache Ungleichung für die beiden

Teil II

Grenzwerte

$$a_n < b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n.$$ ◄

Zum Abschluss dieses Abschnitts werfen wir einen Blick auf das Konvergenzverhalten rationaler Folgen. Ein rationaler Term ist ein Quotient zweier Polynome der Art

$$a_n := \frac{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_0}{c_l n^l + c_{l-1} n^{l-1} + \cdots + c_0},$$

wobei k der Zählergrad und l der Nennergrad von a_n sei, d. h. $b_k \neq 0 \neq c_l$. Es gilt nun

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \pm\infty, & \text{falls} \quad k > l \quad (\text{Zählergrad} > \text{Nennergrad}), \\ 0, & \text{falls} \quad k < l \quad (\text{Zählergrad} < \text{Nennergrad}), \\ \frac{b_k}{c_l}, & \text{falls} \quad k = l \quad (\text{Zählergrad} = \text{Nennergrad}). \end{cases}$$

Sind also Zähler und Nenner gleichgradig, so ist der Grenzwert für $n \to \infty$ von a_n das Verhältnis der Leitkoeffizienten b_k/c_l. So ist beispielsweise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 14n^2 - 12n^3}{n(4n^2 + 7)} = \frac{-12}{4} = -3.$$

Dagegen ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 14n^2 - 12n^3}{n^2(4n^2 + 7)} = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 14n^2 - 12n^4}{n(4n^2 + 7)} = -\infty.$$

4.5 Differenzenfolgen

Wie können wir für die Veränderung der Folgenglieder bei steigendem Index ein geeignetes Wachstums- bzw. Gefällemaß definieren? Der Vergleich zweier benachbarter Folgenglieder S_n und S_{n-1} anhand ihrer Differenz führt zu einer sinnvollen Definition für ein derartiges Wachstumsmaß.

Definition: Differenzenfolge eine reellen Folge

Es sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle Folge. Für $n \geq 1$ wird als Differenzenfolge von (S_n) die Folge

$$\text{diff}_n(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := (S_n - S_{n-1})_{n\geq 1}$$

definiert. Sie stellt die Folge der Unterschiede zweier aufeinanderfolgender Werte der Folge (S_n) dar und beschreibt somit eine Art Wachstumsmaß für (S_n).

Die Differenzenfolge ist daher eine neue Folge, die allerdings im Unterschied zu $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erst ab dem Index $n = 1$ definiert ist.

Beispiele

1. $S_n = n$ für $n \in \mathbb{N}_0$, dann ist die Differenzenfolge $\text{diff}_n(S_n) = (n - (n-1))_{n\geq 1} = (1)_{n\geq 1}$ eine konstante Folge.
2. $S_n = n^2$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Die Definition ergibt für die Differenzenfolge
$$\begin{aligned}\text{diff}_n(S_n) &= (n^2 - (n-1)^2)_{n\geq 1} \\ &= (n^2 - (n^2 - 2n + 1))_{n\geq 1} = (2n-1)_{n\geq 1}.\end{aligned}$$
3. $S_n = n^3$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Die Definition ergibt für die Differenzenfolge
$$\begin{aligned}\text{diff}_n(S_n) &= (n^3 - (n-1)^3)_{n\geq 1} \\ &= (n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1))_{n\geq 1} \\ &= (3n^2 - 3n + 1)_{n\geq 1}.\end{aligned}$$
4. Allgemein: Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ ein Exponent für $S_n = n^k$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Für die Differenzenfolge ergibt sich unter Anwendung des binomischen Lehrsatzes
$$\begin{aligned}\text{diff}_n(S_n) &= (n^k - (n-1)^k)_{n\geq 1} \\ &= \left(n^k - \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n^j \cdot (-1)^{k-j}\right)_{n\geq 1} \\ &= \left(n^k - \left(\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} n^j \cdot (-1)^{k-j} + n^k\right)\right)_{n\geq 1} \\ &= \left(-\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} n^j \cdot (-1)^{k-j}\right)_{n\geq 1} \\ &= \left(kn^{k-1} - \binom{k}{k-2} n^{k-2} + \cdots - (-1)^k\right)_{n\geq 1}.\end{aligned}$$
Die Bildung der Differenzenfolge der Potenzfolge n^k zieht also insbesondere die Erniedrigung des Exponenten k auf $k-1$ im Ergebnispolynom nach sich.
5. $S_n = \frac{1}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Es ergibt sich die Differenzenfolge
$$\text{diff}_n(S_n) = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} = \left(-\frac{1}{n^2+n}\right)_{n\geq 1}.$$ ◄

Sinn und Anwendung der Differenzenfolgen ergeben sich aus dem Hauptsatz über die Summe einer Differenzenfolge.

Hauptsatz über die Summe einer Differenzenfolge

Es sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt für $N \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=1}^{N} (\text{diff}_n(S_n))_k = S_N - S_0.$$

Hierbei müssen wir die Reihenfolge beachten: Zuerst wird aus (S_n) die Differenzenfolge $\text{diff}_n(S_n)$ gebildet. Danach wird diese Differenzenfolge für $n = k$ ausgewertet, indem $n = k$ eingesetzt wird: $(\text{diff}_n(S_n))_k := S_k - S_{k-1}$.

Beweis Die Aussage ergibt sich direkt aus der Definition der Differenzenfolge, da sich bis auf zwei Werte alle Summanden gegenseitig aufheben. Eine derartige Summe wird gelegentlich als Teleskopsumme bezeichnet:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}(\text{diff}_n(S_n))_k &= (\text{diff}_n(S_n))_1 + (\text{diff}_n(S_n))_2 + \cdots + (\text{diff}_n(S_n))_N \\ &= S_1 - S_0 + S_2 - S_1 + \cdots + S_{N-1} - S_{N-2} + S_N - S_{N-1} \\ &= -S_0 + S_N.\end{aligned}$$ ■

Wendet man den Hauptsatz auf bestimmte Folgen an, so ergeben sich geschlossene Terme für bestimmte Summen. Die folgenden beiden Beispiele illustrieren dies:

Beispiel

1. Es sei $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für die Differenzenfolge von (S_n):

$$\begin{aligned}(\text{diff}_n(S_n)) &= \left(\frac{1}{2}(n(n+1) - (n-1)n)\right)_{n\geq 1} \\ &= \left(\frac{1}{2}(n^2 + n - n^2 + n)\right)_{n\geq 1} \\ &= (n)_{n\geq 1}.\end{aligned}$$

Zusammen mit dem Hauptsatz ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{N}(\text{diff}_n(S_n))_k = \sum_{k=1}^{N} k = S_N - S_0 = \frac{N(N+1)}{2} - 0$$

und damit eine geschlossene Formel für die Summe der ersten n Zahlen:

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}.$$

2. Es sei $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und einem $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$. Für die Differenzenfolge von S_n gilt nun

$$\begin{aligned}(\text{diff}_n(S_n)) &= \left(\frac{1}{1-q}(1 - q^{n+1} - (1 - q^n))\right)_{n\geq 1} \\ &= \left(\frac{1}{1-q}(q^n - q^{n+1})\right)_{n\geq 1} \\ &= \left(\frac{1}{1-q} \cdot q^n \cdot (1-q)\right)_{n\geq 1} \\ &= (q^n)_{n\geq 1}.\end{aligned}$$

Zusammen mit dem Hauptsatz ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{N}(\text{diff}(S_n))_k = \sum_{k=1}^{N} q^k = S_N - S_0 = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} - \frac{1-q}{1-q}.$$

Damit folgt

$$\sum_{k=1}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} - 1 = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} - q^0.$$

Addiert man auf beiden Seiten q^0, so ergibt dies die Summenformel für die N-te Partialsumme der geometrischen Reihe, die wir im folgenden Abschnitt näher untersuchen werden:

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$ ◂

Die Differenzenfolge stellt ein Wachstumsmaß für die zugrundegelegte Folge dar.

Satz

1. Eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend (bzw. fallend) genau dann, wenn

$$(\text{diff}_n(S_n))_n \geq 0 \quad (\text{bzw. } (\text{diff}_n(S_n))_n \leq 0)$$

für alle $n \geq 1$.

2. Eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist streng monoton wachsend (bzw. fallend) genau dann, wenn

$$(\text{diff}_n(S_n))_n > 0 \quad (\text{bzw. } (\text{diff}_n(S_n))_n < 0)$$

für alle $n \geq 1$.

Beispiel

Die Folge $S_n = \frac{1}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ist streng monoton fallend, da

$$\begin{aligned}\text{diff}_n(S_n) &= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \\ &= \left(\frac{n-(n+1)}{n(n+1)}\right)_{n\geq 1} = \left(-\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n\geq 1}\end{aligned}$$

eine Folge negativer Werte ist. ◂

Wenn wir die Differenzialrechnung (Kap. 6) und insbesondere die Integralrechnung (Kap. 7) behandeln, werden wir mit der Ableitung einer Funktion eine mit der Differenzenfolge vergleichbare Struktur für Funktionen behandeln. Der letzte Hauptsatz über die Summe von Differenzenfolgen stellt dann einen formalen Vorläufer des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung dar.

4.6 Reihen

Wenn wir die Glieder einer Folge (a_n) kumulieren, also aufsummieren, so erhalten wir eine neue Folge. Wo ist eine derartige Summierung sinnvoll? Wir betrachten dazu das folgende Motivationsbeispiel: In einer Tabelle sei der Kraftstoffverbrauch a_n einer Verbrennungsmaschine in jeder Betriebsstunde $n \geq 1$ verzeichnet:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n	10	30	50	60	70	50	60	90	80	$\cdots$

Wir können diese Verbrauchstabelle auch als Folge auffassen, indem der Index $n \geq 1$ die Betriebsstunde und der entsprechende Wert des Folgengliedes a_n den jeweiligen Stundenverbrauch repräsentiert. Zur Visualisierung werden die Verbrauchsdaten in einem Säulendiagramm (Abb. 4.1) grafisch dargestellt.

Wenn wir uns für die Fragestellung interessieren, welchen Wert der Gesamtverbrauch von der ersten Betriebsstunde bis zur Stunde n erreicht hat, so sind die einzelnen Werte der Verbrauchsdatenfolge aufzusummieren:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Dem Wert S_n entspricht dann die Summe aller Säulenlängen des Diagramms bis einschließlich zur Betriebsstunde n. Wir können daher im Säulendiagramm S_n auch als die Fläche interpretieren, die bis zur Betriebsstunde n durch alle Säulen eingenommen wird.

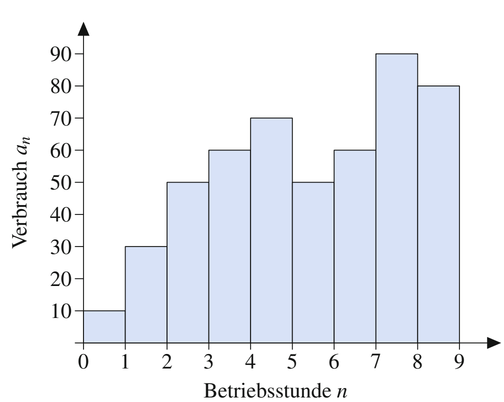


Abb. 4.1 Säulendiagramm zur Darstellung der Verbrauchsdatenfolge

Die Summation über die Glieder einer Folge ergibt eine Reihe

Wir formalisieren nun unsere Überlegungen und definieren die auf einer Summandenfolge basiernde Folge der Partialsummen.

Definition: Partialsummenfolge und unendliche Reihe

Es sei $(a_n)_{n\geq m}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Die Folge $(S_n)_{n\geq m}$, definiert durch

$$S_n := \sum_{k=m}^{n} a_k, \quad \text{für} \quad n \geq m,$$

heißt Folge der Partialsummen. Man bezeichnet die Folge $(S_n)_{n\geq m}$ unabhängig davon, ob sie konvergiert, mit $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ und nennt diese Folge auch unendliche Reihe oder schlicht Reihe.

Falls $(S_n)_{n\geq m}$ konvergiert, so bezeichnet

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k$$

ihren Grenzwert.

Wenn aus dem Kontext klar hervorgeht, bei welchem Startindex m die Reihe beginnt, schreibt man gelegentlich auch abkürzend $\sum a_k$ für die jeweilige Reihe.

Jede Dezimalzahl kann als Beispiel für eine unendliche Reihe betrachtet werden.

Dezimaldarstellung als Reihengrenzwert

Eine Dezimalzahl in der Schreibweise $x = a_0.a_1\,a_2\,a_3\,\ldots \in \mathbb{R}$ kann als Reihengrenzwert aufgefasst werden. Hierbei ist zunächst $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_0 \in \mathbb{Z}$ als Vorkommateil und Nachkommastellen $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ für $k \geq 1$. Damit ist

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} \\ &= a_0 + a_1 \cdot \tfrac{1}{10} + a_2 \cdot \tfrac{1}{100} + a_3 \cdot \tfrac{1}{1000} + \ldots \end{aligned}$$

der Grenzwert der Reihe über die Folge $(a_k \cdot 10^{-k})_{k\in\mathbb{N}_0}$. Sollte $x \notin \mathbb{Q}$ sein, so wird einerseits die Ziffernfolge nicht abbrechen, also $a_k \neq 0$ für unendliche viele $k \in \mathbb{N}_0$ sein, und andererseits auch kein periodisches Muster aufweisen. Es besteht aber die Möglichkeit, x beliebig genau rational zu approximieren, indem wir x durch eine geeignete Partialsumme

$$\begin{aligned} x &\approx \sum_{k=0}^{N} a_k \cdot 10^{-k} \\ &= a_0 + a_1 \cdot \tfrac{1}{10} + a_2 \cdot \tfrac{1}{100} + a_3 \cdot \tfrac{1}{1000} + \ldots \\ &\quad + a_N \cdot \tfrac{1}{10^N} \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

mit hinreichend großem $N \in \mathbb{N}_0$ annähern. ◄

4.7 Konvergenzkriterien für Reihen

Unter welchen Voraussetzungen konvergiert nun eine Reihe? Kann eine unendliche Summe von nicht verschwindenden Folgengliedern gleichen Vorzeichens überhaupt konvergieren, oder wächst bzw. fällt eine derartige Reihe über bzw. unter alle Schranken? Wir betrachten als Beispiel zunächst eine Reihe, die in der Analysis von grundlegender Bedeutung ist.

Definition: Geometrische Reihe

Die über eine Exponentialfolge $a_n = x^n$ mit einer Konstanten $x \in \mathbb{R}$ definierte geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

konvergiert für $|x| < 1$, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}. \tag{4.5}$$

Für $|x| \geq 1$ divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

Die Konvergenzbedingung $|x| < 1$ und der Grenzwert dieser Reihe resultieren aus der Partialsummendarstellung der geometrischen Reihe. Eine nähere Betrachtung verdient der Ausdruck x^k der Summandenfolge dieser Reihe. Für alle $x \neq 0$ ist die Potenz $x^0 = 1$. Wie gehen wir aber mit der Situation x^0 für $x = 0$ um? Viele Taschenrechner geben eine Fehlermeldung aus bei dem Versuch, 0^0 zu berechnen. Da aber $|0| < 1$ ist, konvergiert nach (4.5) die geometrische Reihe für $x = 0$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0^k = \frac{1}{1-0} = 1$$

oder, ausgeschrieben,

$$0^0 + \underbrace{0^1 + 0^2 + 0^3 + \ldots}_{=0} = 1.$$

Zweckmäßig ist es daher, ein für alle Mal

$$0^0 := 1$$

zu setzen.

Die Summandenfolge einer konvergenten Reihe ist stets eine Nullfolge

Wir können also eine konvergente Reihe konstruieren, deren zugrundegelegte Summandenfolge nur positive Werte aufweist. Beispielsweise konvergiert die geometrische Reihe für $x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Trotz der Tatsache, dass unendlich viele positive Werte aufaddiert werden, wächst also die Partialsummenfolge nicht über den Wert 2, da

$$S_n = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{2^n} = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \tfrac{1}{2^n} < 2$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir sehen aber, dass die Summandenfolge $1/2^n$ eine Nullfolge ist. Dies ist in der Tat eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe.

Satz: Notwendige Konvergenzbedingung für Reihen

Es sei $(a_n)_{n \geq m}$ eine Summandenfolge. Konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k,$$

so muss es sich bei $(a_n)_{n \geq m}$ um eine Nullfolge handeln. Anders formuliert: Ist $(a_n)_{n \geq m}$ keine Nullfolge, so kann die o. g. Reihe nicht konvergieren.

Beweis Vorausgesetzt wird nun eine konvergente Reihe mit Grenzwert s:

$$s := \sum_{k=m}^{\infty} a_k.$$

Wir zeigen die Konvergenz der Summandenfolge $(a_n)_{n \geq m}$ gegen 0. Wir geben dazu ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor und zeigen, dass $|a_n| < \varepsilon$ für n hinreichende große n gilt. Für $n \geq m$ ist

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| = \left| \sum_{k=m}^{n+1} a_k - \sum_{k=m}^{n} a_k \right| &= \left| \sum_{k=m}^{n+1} a_k - s + s - \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=m}^{n+1} a_k - s \right| + \left| s - \sum_{k=m}^{n} a_k \right|. \end{aligned}$$

Für die letzte Abschätzung haben wir von der Dreiecksungleichung Gebrauch gemacht. Nun schätzen wir beide Beträge nach

Teil II

Teil II

oben ab. Da nach Voraussetzung

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n} a_k,$$

gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\left| s - \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{für} \quad n \geq n_0.$$

Da $n+1 > n \geq n_0$, folgt hieraus insbesondere

$$\left| \sum_{k=m}^{n+1} a_k - s \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad n \geq n_0.$$

Insgesamt folgt daher für $n \geq n_0$:

$$|a_{n+1}| \leq \left| \sum_{k=m}^{n+1} a_k - s \right| + \left| s - \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Es gilt daher

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

■

Damit also eine Reihe konvergiert, muss die Summandenfolge nicht nur konvergieren, sondern auch den Grenzwert 0 besitzen. Daher sind die folgenden Reihen nicht konvergent:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k} = \infty$, denn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$.
2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k = \infty$, denn $a_n = n \to \infty$.

Die Nullfolgeneigenschaft der Summandenfolge ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend für die Konvergenz der entsprechenden Reihe. Dies zeigt das Beispiel der harmonischen Reihe.

Definition: Harmonische Reihe

Die harmonische Reihe ist bestimmt divergent gegen ∞:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Der Divergenznachweis für diese Reihe nutzt das später vorgestellte Minorantenkriterium und sei als Übungsaufgabe empfohlen.

Bislang steht uns nur ein notwendiges Konvergenzkriterium und damit ein hinreichendes Divergenzkriterium zur Verfügung. Wir diskutieren nun hinreichende Konvergenzkriterien.

Satz: Notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung für Reihen

Es sei $(a_n)_{n\geq m}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, deren Folgenglieder nichtnegativ sind: $a_n \geq 0$ für alle $n \geq m$. Die entsprechende unendliche Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k$$

ist genau dann konvergent, wenn die Partialsummenfolge

$$S_n := \sum_{k=m}^{n} a_k$$

beschränkt ist.

Beweis Da eine konvergente Folge notwendigerweise beschränkt ist, ist nur die umgekehrte Implikationsrichtung zu zeigen. Es sei also S_n beschränkt. Da alle Summanden nichtnegativ sind, also $a_n \geq 0$ gilt, ist die Partialsummenfolge monoton wachsend. Eine monotone und beschränkte Folge konvergiert. ■

Die Konvergenz bzw. die Divergenz einer Reihe ändert sich nicht, falls *endlich* viele Summanden fortgelassen werden. Insbesondere ist es für diese Fragestellung unerheblich, bei welchem Index die Reihe startet. In vielen Fällen ist es sogar sinnvoll, statt der kompletten Reihe eine verkürzte Reihe zu betrachten, bei welcher Konvergenzfragen u. U. leichter zu beantworten sind. Im Fall der Konvergenz einer Reihe ändert sich bei Verkürzung nur der Grenzwert um die Summe der fehlenden Summanden.

Eine Reihe konvergiert definitionsgemäß genau dann, wenn ihre Partialsummenfolge konvergiert. So ergeben Konvergenzkriterien für Folgen auch Konvergenzkriterien für Reihen. Beispielsweise können zwei konvergente Reihen mit identischem Startindex gliedweise addiert werden. Wir erhalten eine konvergente Summenreihe, deren Grenzwert aus der Summe der Grenzwerte der beiden Einzelreihen besteht. Sind also

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=m}^{\infty} b_k$$

zwei konvergente Reihen, so ist

$$\sum_{k=m}^{\infty} (a_k + b_k)$$

ebenfalls konvergent, und es gilt für den Grenzwert

$$\sum_{k=m}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k + \sum_{k=m}^{\infty} b_k.$$

Konstante Faktoren können aus einer konvergenten Reihe ausgeklammert werden. Für jede konvergente Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k$$

gilt

$$\sum_{k=m}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=m}^{\infty} a_k \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nicht alle Rechenregeln, die wir von endlichen Summen kennen, lassen sich auch auf konvergente Reihen übertragen. So können wir beispielsweise nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen die Summanden einer konvergenten Reihe umsortieren in der Erwartung, dass sich das Konvergenzverhalten dabei nicht ändert.

Gelegentlich können wir die Summandenfolge einer Reihe nach oben oder nach unten betragsmäßig abschätzen. Hierdurch ergibt sich ein Konvergenz- bzw. ein Divergenzkriterium.

Satz: Majorantenkriterium

Es sei $\sum\limits_{k=m}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe mit nichtnegativer Summandenfolge $b_k \geq 0$. Ist $(a_n)_{n \geq p}$ eine Folge mit $|a_n| \leq b_n$ für fast alle $n \geq \max(m, p)$, so konvergieren auch die Reihen

$$\sum_{k=p}^{\infty} |a_k| \quad \text{und} \quad \sum_{k=p}^{\infty} a_k.$$

In dieser Situation nennt man die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} b_k$ eine **konvergente Majorante** von $\sum\limits_{k=p}^{\infty} a_k$.

Für die Reihe $\sum b_k$ wird in diesem Kriterium vorausgesetzt, dass sämtliche Summanden b_k nichtnegativ sind. Die Anwendbarkeit des Majorantenkriteriums wird durch diese Forderung nicht eingeschränkt, wenn bei einer konvergenten Reihe $\sum b_k$ endlich viele Summanden diese Bedingung nicht erfüllen. Man betrachte in solchen Situationen einfach eine entsprechend verkürzte Reihe. Der Konvergenz tut das keinen Abbruch. Die Konvergenz von $\sum |a_k|$ ist leicht zu begründen: Es sei $n_0 \geq \max(m, p)$. Die Partialsummenfolge

$$\sum_{k=n_0}^{n} |a_k|$$

ist beschränkt, denn sie lässt sich nach oben durch

$$\sum_{k=n_0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=n_0}^{n} b_k \overset{b_k \geq 0}{\leq} \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$$

abschätzen. Da die Folge der Summanden $|a_k|$ nichtnegativ ist, konvergiert nach dem letzten Satz die Reihe $\sum |a_k|$. Am Ende dieses Kapitels werden wir das Vollständigkeitsaxiom als prägende Eigenschaft der reellen Zahlen kennenlernen. Eine Folge dieses Axioms ist, dass die Konvergenz von $\sum a_k$ äquivalent damit ist, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die endliche Teilsumme

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

ist für fast alle $m, n > n_0$ mit $m \leq n$. Dieser Sachverhalt wird als *Konvergenzkriterium von Cauchy* bezeichnet. Die Konsequenz ist, dass nun auch die Konvergenz von $\sum a_k$ folgt, denn es gilt hiernach für die konvergente Reihe $\sum |a_k|$ zunächst

$$\left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon$$

für fast alle $m, n > n_0$ mit $m \leq n$. Somit ergibt sich nach der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| = \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| < \varepsilon$$

für fast alle $m, n > n_0$ mit $m \leq n$, was nach dem Konvergenzkriterium von Cauchy die Konvergenz der Reihe $\sum a_k$ nach sich zieht.

Ähnliche Überlegungen führen auf eine Methode, die Divergenz einer Reihe nachzuweisen:

Satz: Minorantenkriterium

Es sei $\sum\limits_{k=m}^{\infty} b_k$ eine divergente Reihe mit nichtnegativen Summanden $b_k \geq 0$. Ist $(a_n)_{n \geq p}$ eine Folge mit $a_n \geq b_n$ für fast alle $n \geq p$, so divergiert auch

$$\sum_{k=p}^{\infty} a_k.$$

In dieser Situation wird die Reihe $\sum\limits_{k=m}^{\infty} b_k$ als **divergente Minorante** von $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

Wie beim Majorantenkriterium schränkt die Forderung, dass die Minorante nur nichtnegative Summanden aufweist, die Anwendbarkeit nicht ein. Sollten endlich viele Summanden von $\sum b_k$ negativ sein, so verkürze man entsprechend diese Reihe, wodurch sich die Divergenzeigenschaft nicht ändert.

Zu diesen beiden Kriterien diskutieren wir jeweils ein Beispiel.

Teil II

Beispiel

1. Als Vorüberlegung betrachten wir zunächst die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right).$$

Diese Reihe ist konvergent, denn die n-te Partialsumme bildet eine Teleskopsumme:

$$\begin{aligned}S_n &:= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\\ &\quad \cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= 1-\frac{1}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty} 1.\end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}1 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+k}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt nun die Konvergenz von

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k^2+k)} = 2. \tag{4.6}$$

Wir betrachten nun die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}. \tag{4.7}$$

Ist diese Reihe nun konvergent oder nicht? Wir zeigen die Konvergenz mit dem Majorantenkriterium. Wegen

$$2n^2 = n^2+n^2 \geq n^2+n \quad \text{für alle} \quad n\geq 1$$

folgt

$$\frac{1}{n^2}\leq\frac{2}{n^2+n} \quad \text{für alle} \quad n\geq 1.$$

Also ist die Reihe (4.6) eine konvergente Majorante der Reihe (4.7). Es folgt damit deren Konvergenz. Darüber hinaus können wir ihren Grenzwert abschätzen:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2+k} = 2.$$

Der Grenzwert dieser Reihe lautet dabei exakt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\approx 1.644934066 < 2.$$

2. Mithilfe des Minorantenkriteriums folgt die Divergenz von

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-1}, \tag{4.8}$$

da die (verkürzte) harmonische Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$$

eine divergente Minorante von (4.8) darstellt, denn es gilt

$$\frac{1}{k-1}\geq\frac{1}{k} \quad \text{für alle} \quad k\geq 2.$$ ◄

Die Divergenz der Reihe (4.8) kann aber auch ohne Minorantenkriterium gezeigt werden, denn es gilt

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$

Ein weiteres Konvergenzkriterium für Reihen erhalten wir durch den Vergleich des Verhältnisses von Summand zu Vorgängersummand einer Reihe.

Satz: Quotientenkriterium

Es sei $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit nichtverschwindenden Summanden $a_k \neq 0$. Falls es ein $q\in(0,1)$ gibt mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leq q \quad \text{für fast alle} \quad n\geq m,$$

dann konvergieren

$$\sum_{k=m}^{\infty}|a_k| \quad \text{und} \quad \sum_{k=m}^{\infty}a_k.$$

Beweis Nach Voraussetzung gibt es ein $q\in(0,1)$, sodass ab einem hinreichend groß gewählten Startindex $n_0\geq m$ gilt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leq q \quad \text{für alle} \quad n\geq n_0.$$

Damit gilt für alle $n\geq n_0$

$$1 > q \geq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

und somit

$$|a_{n+1}|\leq|a_n|q \quad \text{für} \quad n\geq n_0.$$

Wir haben damit folgenden Größenvergleich:

$$\begin{aligned}
|a_{n_0+1}| &\le |a_{n_0}|q \\
|a_{n_0+2}| &\le |a_{n_0+1}|q \;\le\; |a_{n_0}|q^2 \\
&\vdots \\
|a_{n_0+p}| &\le |a_{n_0+p-1}|q \;\le \ldots \le\; |a_{n_0}|q^p, \quad \text{für} \quad p \ge 1
\end{aligned}$$

bzw.

$$|a_n| \le |a_{n_0}|q^{n-n_0} \quad \text{für} \quad n \ge n_0 + 1$$

Wir können daher die Beträge fast aller Summanden $|a_n|$ nach oben abschätzen:

$$|a_n| \le |a_{n_0}|q^{n-n_0} = rq^n \quad \text{für alle} \quad n \ge n_0 + 1$$

mit $r = |a_{n_0}|q^{-n_0} > 0$. Nun ist zudem, da $|q| < 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} rq^k = r\sum_{k=1}^{\infty} q^k = r\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k - 1\right) = r\left(\frac{1}{1-q} - 1\right)$$

konvergent, aufgrund der Konvergenz und des Grenzwertes der geometrischen Reihe. Wir haben also mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} rq^k$$

eine konvergente Majorante. ■

Beispiel

Wir wollen mithilfe des Quotientenkriteriums die Konvergenz von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

nachweisen. Wir stellen den Betragsquotienten auf:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \le \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}, \qquad n \ge 3.
\end{aligned}$$

Es gilt also für alle $n \ge 3$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q := \frac{8}{9} < 1.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert somit die Reihe. ◀

Die vorausgegangenen Sätze geben eine Aussage darüber, unter welchen Voraussetzungen die Reihen

$$\sum_{k=m}^{\infty} |a_k| \quad \text{und} \quad \sum_{k=m}^{\infty} a_k$$

konvergieren. In dieser Situation ist von absoluter Konvergenz die Rede.

Definition: Absolute Konvergenz von Reihen

Eine Reihe $\sum a_k$ heißt absolut konvergent, wenn

$$\sum_{k=m}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

ist offensichtlich für alle $|x| < 1$ absolut konvergent.

Konvergiert eine Reihe absolut, so folgt auch ihre Konvergenz im bisherigem Sinne, denn ist eine Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} |a_k|$$

konvergent, so konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k.$$

Die Umkehrung gilt jedoch nicht. So kann man zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

konvergiert, obwohl

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

als harmonische Reihe bestimmt divergent gegen ∞ ist. Durch die in Abschn. 8.2 behandelte Taylor-Entwicklung kann gezeigt werden, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -\ln 2 \approx -0.6931471805,$$

wobei $\ln 2$ den natürlichen Logarithmus von 2 darstellt.

Anwendung: Partialsummen in MATLAB

Wir können mithilfe von MATLAB sehr komfortabel Reihengrenzwerte über ihre Partialsummen approximativ bestimmen. Hierzu definieren wir zunächst eine Liste, genauer einen Vektor, mit den beteiligten Indizes. Anschließend berechnen wir die gewünschten Summanden aus diesen Indizes und summieren schließlich über alle Summanden. So können wir beispielsweise die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} =: S_n$$

über die folgenden MATLAB-Kommandos für $n = 10$ bestimmen:

```
>> a=[1:1:10]

a =
     1     2     3     4     5     6
           7     8     9    10

>> s=1./a.^2

s =
    1.0000    0.2500    0.1111    0.0625
              0.0400    0.0278    0.0204
              0.0156    0.0123    0.0100

>> sum(s)

ans =
    1.5498
```

Das erste Kommando `a=[1:1:10]` erzeugt eine Indexliste mit den ganzen Zahlen von 1 bis 10, die dem Variablennamen `a` zugewiesen wird. Das zweite Kommando `s=1./a.^2` weist jedem Index k aus der Liste den Kehrwert seines Quadrats zu, wobei die Werteliste den Bezeichner `s` erhält. Die Ausgabeliste besteht daher aus den Werten

$$\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \frac{1}{7^2}, \frac{1}{8^2}, \frac{1}{9^2}, \frac{1}{10^2}.$$

Die Punkte vor dem Divisionszeichen (`./`) und dem Potenzierungszeichen (`.^`) bedeuten dabei, dass sich die Rechenoperation $\frac{1}{k^2}$ auf jeden einzelnen Wert k aus der Indexliste `a` bezieht. Mit dem Befehl `sum(s)` werden sämtliche Werte aus der Liste `s` aufaddiert. Das Ergebnis ist die Ausgabe 1.5496. Der exakte Reihengrenzwert ist $\frac{\pi^2}{6}$. Wenn wir nun diesen Ausgabewert mit 6 multiplizieren und daraus die Quadratwurzel ziehen, erhalten wir mit `sqrt(6*ans)` den Ausgabewert 3.0494, was vom Wert π noch deutlich entfernt ist. Wir können die Approximation durch Erhöhung des Oberindex n verbessern. Mit der Wahl von $n = 1000$ erhalten wir über die folgende, etwas kürzere Befehlssequenz

```
>> a=[1:1000];
>> sqrt(6*sum(1./a.^2))

ans =
    3.1406
```

bereits ein besseres Ergebnis. Das Semikolon nach dem ersten Befehl dient zur Unterdrückung der Ausgabe der Indizes von 1 bis 1000. Der Befehl `sqrt(6*sum(1./a.^2))` fasst die Summandengenerierung, die Summation und die Berechnung der Quadratwurzel des Sechsfachen der Summe zusammen. Die Ausgabe 3.1406 stimmt in den ersten drei Stellen mit dem Wert von π überein. Offenbar konvergiert die Reihe nur sehr langsam gegen ihren Grenzwert. Eine Erhöhung des Oberindex auf 20000 ergibt den Ausgabewert 3.1415, der in seinen hier angegebenen Stellen mit den ersten fünf Stellen von π übereinstimmt. Wir können das Ausgabeformat auf 15 Nachkommastellen erweitern, um die Genauigkeit dieses Näherungswertes besser beurteilen zu können:

```
a=[1:20000];
>> b=sqrt(6*sum(1./a.^2))

b =
    3.1415

>> format long
>> b

b =
   3.141544907937694

>> pi

ans =
   3.141592653589793

>> pi-b

ans =
     4.774565209952897e-05

>> 100*(pi-b)/pi

ans =
   0.001519791308557
```

Der relative Fehler zur Näherung von π mit dieser Reihe beträgt bei $n = 20000$ somit etwa 0.0015 %.

Anwendung: Die geometrische Reihe in MATLAB

Wir können MATLAB auch dazu verwenden, Partialsummen und Grenzwerte unendlicher Reihen für nicht weiter festgelegte Parameter allgemein zu bestimmen. Hierzu verwenden wir die Symbolic Math Toolbox.

Für $q \neq 1$ lautet die n-te Partialsumme der geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Ist dagegen $q = 1$, folgt einfach

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

Für $|q| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Wir wollen nun mit MATLAB die achte Partialsumme und den Grenzwert der geometrischen Reihe für $q = \frac{1}{3}$ bestimmen. Wir können dies wieder mithilfe des `sum`-Befehls auf rein numerische Weise bewerkstelligen. Alternativ können wir auch symbolisch rechnen. Hierzu deklarieren wir zunächst den Summationsindex k als symbolische Variable und bestimmen die symbolische Summe der Potenzen $(\frac{1}{3})^k$ für $k = 0, \ldots, 8$:

```
>> syms k
>> symsum((1/3)^k,0,8)

ans =

9841/6561
```

Hierbei handelt es sich in der Tat um die achte Partialsumme dieser Reihe, denn es gilt

$$\sum_{k=0}^{8} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1-(\frac{1}{3})^9}{1-\frac{1}{3}} = 3 \cdot \frac{1-\frac{1}{19683}}{2} = \frac{9841}{6561}.$$

Es ist aber auch möglich, zusätzlich q und n jeweils als symbolische Variable offenzulassen und uns somit die n-te Partialsumme der geometrischen Reihe durch MATLAB ausgeben zu lassen:

```
>> syms k q n
>> symsum(q^k,k,0,n)

ans =

piecewise(q == 1, n + 1, q ~= 1, (q*q^n
    - 1)/(q - 1))
```

Diese Antwort interpretieren wir als stückweise (*piecewise*) erklärt durch:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1, & q = 1, \\ \frac{q \cdot q^n - 1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1. \end{cases}$$

Schließlich können wir auch den Reihengrenzwert durch MATLAB symbolisch bestimmen lassen:

```
syms k q
>> symsum(q^k,k,0,inf)

ans =

piecewise(1 <= q, Inf, abs(q) < 1, -1/(q
     - 1))
```

Dieses Ergebnis interpretieren wir nun als

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \infty, & q \geq 1, \\ \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}, & |q| < 1. \end{cases}$$

Ist eine Variable mit `syms` einmal als symbolisch deklariert, so muss sie nicht erneut auf diese Weise deklariert werden, wenn sie durch weitere nachfolgende Befehle im symbolischem Sinne verwendet wird. Insofern wäre beispielsweise der Befehl `syms k q` vor dem letzten Aufruf von `symsum` nicht notwendig gewesen.

Eine wichtige Eigenschaft absolut konvergenter Reihen ist, dass ihre Konvergenz und ihr Grenzwert bei Umsortieren der Summanden erhalten bleiben.

Satz

Ist

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k$$

eine absolut konvergente Reihe und $(\alpha_k)_{k \geq m}$ eine Folge, die sich von der Summandenfolge $(a_k)_{k \geq m}$ nur durch eine andere Reihenfolge der Folgenglieder unterscheidet, so konvergiert auch die Reihe über diese umsortierten Summanden absolut, ohne dass sich der Grenzwert dabei ändert:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=m}^{\infty} a_k.$$

Beweis Um dies nachzuweisen, beachten wir, dass es eine Indexfolge $(n_k)_{k\geq m}$ mit $n_k \in \{m, m+1, \ldots\}$ gibt, sodass

1. es zu jedem $k' \in \{m, m+1, \ldots\}$ ein $k \in \{m, m+1, \ldots\}$ gibt mit $n_k = k'$,
2. für zwei verschiedene $k, l \in \{m, m+1, \ldots\}$ auch die entsprechenden Werte der Indexfolge verschieden sind: $n_k \neq n_l$,
3. für die Summandenfolge der umsortierten Reihe $\alpha_k = a_{n_k}$ für $k \geq m$ gilt.

Die ersten beiden Eigenschaften besagen, dass es sich bei der Folge (n_k) um eine bijektive Abbildung auf der Menge $\{m, m+1, \ldots\}$ handelt und diese Indizes einfach nur in eine andere Reihenfolge bringt. Es sei nun $\varepsilon > 0$. Da aufgrund der vorausgesetzten absoluten Konvergenz die Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert, konvergiert auch die für jeden Startindex $p \geq m$ später startende Reihe

$$\sum_{k=p}^{\infty} |a_k|$$

absolut, wobei sich der (positive) Grenzwert in der Regel vermindert oder bereits 0 ist. Wir können daher den Startindex p so groß wählen, dass

$$\sum_{k=p}^{\infty} |a_k| < \tfrac{1}{2}\,\varepsilon$$

gilt. Wir wählen nun einen Mindestindex $M \in \mathbb{N}_0$ so, dass die Menge der Werte unserer Indexfolge $\{n_m, n_{m+1}, \ldots, n_M\}$ die Elemente $m, m+1, \ldots, p-1$ beinhaltet. Nun können wir die Partialsummenfolge

$$s_j := \sum_{k=m}^{j} \alpha_k = \sum_{k=m}^{j} a_{n_k}, \qquad j \geq m$$

der umsortierten Reihe für alle $j \geq M$ gegen den Reihengrenzwert der Ausgangsreihe unter Zuhilfenahme der Dreiecksungleichung abschätzen:

$$\begin{aligned}
\left| s_j - \sum_{k=m}^{\infty} a_k \right| &= \left| \sum_{k=m}^{j} a_{n_k} - \sum_{k=m}^{\infty} a_k \right| \\
&= \left| \sum_{k=m}^{j} a_{n_k} - \sum_{k=m}^{p-1} a_k + \sum_{k=m}^{p-1} a_k - \sum_{k=m}^{\infty} a_k \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=m}^{j} a_{n_k} - \sum_{k=m}^{p-1} a_k \right| + \left| \sum_{k=m}^{p-1} a_k - \sum_{k=m}^{\infty} a_k \right| \\
&\leq \underbrace{\sum_{k=p}^{\infty} |a_k|}_{<\frac{1}{2}\varepsilon} + \underbrace{\left| \sum_{k=m}^{p-1} a_k - \sum_{k=m}^{\infty} a_k \right|}_{=\left|\sum_{k=p}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=p}^{\infty} |a_k| < \frac{1}{2}\varepsilon} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit gilt für die Partialsummenfolge für alle $j \geq M$

$$\left| s_j - \sum_{k=m}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon,$$

und daher ist $(s_j)_{j\geq m}$ konvergent mit

$$\lim_{j\to\infty} s_j = \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=m}^{\infty} a_k.$$

Sie ist sogar absolut konvergent, da nach dieser Argumentation auch jede Umsortierung der konvergenten Reihe

$$\sum_{k=m}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert. ■

4.8 Die Exponentialreihe

Gegenstand dieses Abschnitts ist eine Reihe mit grundlegender Bedeutung für die gesamte Analysis und weitreichenden Konsequenzen für sämtliche natur- und ingenieurwissenschaftliche Disziplinen.

Definition: Reelle Exponentialreihe

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Exponentialreihe

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{4.9}$$

absolut.

Es ist nicht unüblich, die Klammern beim Einsetzen eines Arguments x wegzulassen, sodass wir oftmals $\exp x$ statt $\exp(x)$ schreiben, wenn unmittelbar klar ist, dass ausschließlich x eingesetzt wird. Die Exponentialreihe gehört zu den Potenzreihen, die Gegenstand eines eigenen Abschnitts sind.

Der Nachweis der absoluten Konvergenz dieser Reihe ist ein schönes Beispiel für die Anwendung des Quotientenkriteriums. Es sei zu diesem Zweck $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige, zuvor festgelegte reelle Zahl. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n > 2|x|$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{x^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot x^n} \right| \\
&= \frac{|x|}{n+1} < \frac{|x|}{n} < \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2} =: q < 1.
\end{aligned}$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Exponentialreihe für alle $x \in \mathbb{R}$. Aus der Anwendung des Quotientenkriteriums folgt zudem die Konvergenz von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right| .$$

Die Exponentialreihe konvergiert daher für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut. Wir sehen uns nun für einige Werte von x die Exponentialreihe im Detail an. Es gilt für $x = 0$

$$\exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1 + \frac{0^1}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \cdots = 1,$$

wobei wir uns daran erinnern, dass $0^0 = 1$ ist. Für $x = 1$ ergibt sich

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = 1 + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \cdots =: \mathrm{e}.$$

Diese berühmte Zahl heißt **eulersche Zahl**. Sie hat etwa folgenden Wert

$$\mathrm{e} \approx 2.718281828$$

und ist nicht rational: $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$. Es gilt zudem

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

was mithilfe des binomischen Lehrsatzes und der Definition von exp 1 gezeigt werden kann.

Satz: Cauchy-Produkt zweier Reihen

Es seien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

zwei absolut konvergente Reihen. Dann konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}a_k$$

absolut. Diese Reihe wird als Cauchy-Produkt der beiden Reihen bezeichnet. Der Grenzwert ist das Produkt der einzelnen Reihengrenzwerte:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Mithilfe des Cauchy-Produkts können wir eine zentrale Eigenschaft der Exponentialreihe nachweisen. Die sog. Funktionalgleichung der Exponentialfunktion liefert eine Möglichkeit, die Exponentialreihe einer Summe multiplikativ zu zerlegen:

Satz: Funktionalgleichung der Exponentialfunktion

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y).$$

Beweis Wir wenden den Satz über das Cauchy-Produkt auf die beiden Reihen $\exp x$ und $\exp y$ an. Es ist

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \qquad \exp y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

mit entsprechend definierten Folgen a_k und b_k:

$$a_k := \frac{x^k}{k!}, \qquad b_k := \frac{y^k}{k!}.$$

Wir bilden nun die Summe

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\cdot\underbrace{\frac{n!}{(n-k)!k!}}_{=\binom{n}{k}} x^{n-k}y^k$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k = \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

Die letzte Umformung ergibt sich aus dem binomischen Lehrsatz. Das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$ ergibt nun hiermit

$$\begin{aligned}(\exp x)(\exp y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}\\ &= \exp(x+y).\end{aligned}$$ ■

Wir können die Funktionalgleichung auch für Summen mit beliebig vielen Summanden formulieren. Es gilt

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp a_k$$

für beliebige $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Aus der Funktionalgleichung ergeben sich insbesondere die folgenden Eigenschaften.

Satz: Elementare Eigenschaften der Exponentialfunktion

Es gelten:

1. $\exp x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
2. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
3. $\exp n = \mathrm{e}^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis Wir zeigen zunächst die zweite Eigenschaft. Es gilt aufgrund der Funktionalgleichung für beliebiges $x \in \mathbb{R}$

$$1 = \exp 0 = \exp(x - x) = \exp(x) \cdot \exp(-x).$$

Daher folgt

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$$

und insbesondere $\exp x \neq 0$. Um noch die erste Eigenschaft zu zeigen, dass sogar $\exp x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, betrachten wir zwei Fälle. Für $x \geq 0$ gilt

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}_{\geq 0} \geq 1 > 0.$$

Den Fall $x < 0$ führen wir wegen $-x \geq 0$ auf diese Situation zurück. Aufgrund der zweiten Eigenschaft gilt

$$\exp x = \frac{1}{\exp(-x)} > 0,$$

denn, wie zuvor gezeigt, ist $\exp(-x) > 0$, da $-x \geq 0$.

Die dritte Eigenschaft ist ebenfalls sehr einfach aus der Funktionalgleichung und aus der zweiten Eigenschaft herzuleiten: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt zunächst

$$\exp n = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp 1 = \mathrm{e}^n.$$

Den Fall negativer ganzzahliger Exponenten führen wir zurück auf die soeben gezeigte Situation. Für ganzzahliges $n < 0$ ist $-n > 0$ und damit $\exp(-n) = \mathrm{e}^{-n}$. Daher haben wir

$$\exp n = \frac{1}{\exp(-n)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{-n}} = \mathrm{e}^n. \qquad \blacksquare$$

Uns liegt mit der dritten Eigenschaft des letzten Satzes eine Verbindung zwischen der Reihe $\exp n$ und der Potenz e^n mit Exponenten $n \in \mathbb{Z}$ vor. Dies erklärt den Namen *Exponentialreihe*. Wir werden nun diese Eigenschaft für beliebige reelle Exponenten verallgemeinern. Ist $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, so können wir x in die Summe des größten ganzzahligen Anteils $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ von x sowie des gebrochenen Anteils $h \in [0, 1)$ zerlegen: $x = \lfloor x \rfloor + h$.

$$\begin{aligned} \exp x &= \exp(\lfloor x \rfloor + h) \\ &= \exp\lfloor x \rfloor \cdot \exp(h) = \mathrm{e}^{\lfloor x \rfloor} \exp(h) = \mathrm{e}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}. \end{aligned}$$

Damit besteht die Möglichkeit, mithilfe der Reihe $\exp h$ für $h \in [0, 1)$ die Exponentialreihe für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ beliebig genau zu approximieren, sofern eine gute Näherung für die eulersche Zahl vorliegt.

Beispiel

Wir berechnen $\exp(3.14)$ näherungsweise und nutzen dazu die vierte Partialsumme der Exponentialreihe für den gebrochenen Anteil 0.14:

$$\begin{aligned} \exp(3.14) &= \mathrm{e}^3 \exp(0.14) \\ &\approx \mathrm{e}^3 \sum_{k=0}^{4} \frac{0.14^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^3 \cdot \left(1 + \frac{0.14}{1} + \frac{0.14^2}{2} + \frac{0.14^3}{6} + \frac{0.14^4}{24}\right) \\ &= \mathrm{e}^3 \cdot \left(1 + \frac{0.14}{1} + \frac{0.0196}{2} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{0.002744}{6} + \frac{0.00038416}{24}\right) \\ &= \mathrm{e}^3 \cdot 1.15027334 \approx 23.10385764. \end{aligned}$$

Im Vergleich mit dem entsprechenden Ergebnis eines mit hochgenauer Gleitpunktarithmetik arbeitenden Rechners,

$$\exp(3.14) \approx 23.103866858722184820337,$$

ergibt dies eine relative Abweichung von ungefähr $4 \cdot 10^{-5}$ %. Wertet man die Exponentialreihe für $x = 3.14$ selbst bis zur vierten Partialsumme aus, so erhält man eine deutlich schlechtere Approximation:

$$\exp(3.14) \approx \sum_{k=0}^{4} \frac{3.14^k}{k!} = 18.28014534.$$

Hierbei muss allerdings beachtet werden, dass bei der ersten Approximation ein hochgenaues Ergebnis für die eulersche Zahl e investiert werden musste. ◀

Da $\mathrm{e}^n = \exp(n)$ für alle ganzzahligen n gilt, ist es naheliegend, für alle reellen x die Potenz e^x zu definieren, indem wir

$$\mathrm{e}^x := \exp(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

setzen. Wir werden daher ab jetzt beide Schreibweisen verwenden.

Für $x < 0$ ist die Approximation der Exponentialfunktion durch die Partialsummen der Exponentialreihe in der Regel schlechter als für positive Argumente. Wegen $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$ können wir auch für negative x von den besseren Konvergenzeigenschaften der Exponentialreihe bei positiven Argumenten profitieren (vgl. Aufgabe 4.10).

Die Sinus- und Kosinusreihe sind Bestandteile einer komplexen Exponentialreihe

Auf der Exponentialreihe basieren die Sinus- und Kosinusreihe.

Definition: Sinus- und Kosinusreihe

Für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Sinus- und die Kosinusreihe absolut:

$$\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{4.10}$$

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{4.11}$$

Wir nennen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ den Sinus bzw. den Kosinus von x.

Wie bei der Exponentialfunktion ist es auch bei diesen Funktionen oftmals üblich, die Klammern um die Argumente wegzulassen, wenn klar ist, was in die jeweilige Funktion eingesetzt werden soll. So nutzen wir $\sin x$ für $\sin(x)$ und $\cos x$ für $\cos(x)$.

Die folgenden nützlichen Eigenschaften folgen direkt aus der Definition dieser Reihen.

Satz: Parität des Sinus und des Kosinus

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x, \\ \cos(-x) &= \cos x. \end{aligned}$$

Funktionen, die es gestatten, ein Minuszeichen aus dem Argument nach vorn zu ziehen werden als **ungerade** bezeichnet. Funktionen, die ein Minuszeichen im Argument ignorieren heißen **gerade**. Der Sinus ist daher eine ungerade Funktion, während der Kosinus eine gerade Funktion darstellt. Die Parität des Sinus und des Kosinus geht mit den Exponenten ihrer Reihendarstellung einher. In der Sinusreihe treten nur ungerade Exponenten auf, während die Kosinusreihe ausschließlich über gerade Exponenten in den Summanden verfügt.

Die Definition der Konvergenz reeller Folgen und Reihen kann durch Verwendung des komplexen Betrags formal analog übertragen werden auf Folgen und Reihen in $\mathbb{C}$. Im Hinblick auf diese erweiterte Konvergenzdefinition kann gezeigt werden, dass die Exponentialreihe auch für sämtliche komplexe Argumente konvergiert.

Definition: Komplexe Exponentialreihe

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die komplexe Exponentialreihe

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

absolut. Wie bei der reellen Exponentialreihe ist auch die Schreibweise $\mathrm{e}^z := \exp(z)$ üblich.

Auch für alle komplexen Argumente $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt die Funktionalgleichung

$$\exp(z_1 + z_2) = (\exp z_1)(\exp z_2).$$

Die aus der Funktionalgleichung folgende Kehrwertregel bleibt daher im Komplexen erhalten: Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}.$$

Im Gegensatz zur reellen Exponentialfunktion können auch nichtreelle Grenzwerte der komplexen Exponentialreihe zustande kommen. Die Regel $\exp x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist somit nicht für komplexe Argumente aufrechtzuerhalten. Stattdessen gilt lediglich $\exp z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Es kann zudem gezeigt werden, dass die komplexe Konjugation mit der Auswertung der Exponentialreihe vertauschbar ist:

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}).$$

Insbesondere folgt hieraus $\overline{\exp(\mathrm{i}x)} = \exp(-\mathrm{i}x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Die Funktionalgleichung lässt eine Aufspaltung von $\exp(z)$ für alle $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gemäß

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \exp(a + \mathrm{i}b) \\ &= \exp((a + \mathrm{i} \cdot 0) + (0 + \mathrm{i}b)) \\ &= \exp(a + \mathrm{i} \cdot 0)\exp(0 + \mathrm{i}b) = \exp(a)\exp(\mathrm{i}b) \end{aligned}$$

zu. Hierin erkennen wir die reelle Exponentialfunktion $\exp(a) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \in \mathbb{R}$ und den Faktor $\exp(\mathrm{i}b) = \exp(\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z))$, dessen Lage in der komplexen Ebene wir nun bestimmen wollen. Da der Betrag einer komplexen Zahl die Quadratwurzel aus dem Produkt der Zahl mit ihrem konjugiert Komplexen ist, folgt nun für jedes imaginäre Argument $\mathrm{i}x$ mit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |\exp(\mathrm{i}x)| &= \sqrt{\exp(\mathrm{i}x)\overline{\exp(\mathrm{i}x)}} = \sqrt{\exp(\mathrm{i}x)\exp(-\mathrm{i}x)} \\ &= \sqrt{\exp(\mathrm{i}x - \mathrm{i}x)} = \sqrt{\exp 0} = 1. \end{aligned}$$

Die Werte der imaginären Exponentialfunktion $\exp(\mathrm{i}x)$ liegen daher für alle reellen x-Werte auf dem Rand des Einheitskreises $\mathbb{E}$ der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ (Abb. 4.2).

Wir werfen nun einen genaueren Blick auf die Summanden der imaginären Exponentialreihe und beachten dabei, dass die Potenz i^k für $k \in \mathbb{N}_0$ nur die vier periodisch auftretenden Werte

Teil II

$i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ und $i^3 = -i$ annimmt, denn es ist $i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$ usw.:

$$\begin{aligned}\exp(ix) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \frac{x^k}{k!} \\ &= i^0 \frac{x^0}{0!} + i^1 \frac{x^1}{1!} + i^2 \frac{x^2}{2!} + i^3 \frac{x^3}{3!} + i^4 \frac{x^4}{4!} + i^5 \frac{x^5}{5!} \cdots \\ &= \frac{x^0}{0!} + i\frac{x^1}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} \cdots .\end{aligned}$$

Durch Umsortieren der Summanden nach reellen und imaginären Termen erhalten wir:

$$\begin{aligned}\exp(ix) &= \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + i\frac{x^1}{1!} - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} \cdots \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{= \cos x} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{= \sin x}\end{aligned}$$

Wir können daher sowohl den Sinus als auch den Kosinus auf folgende Weise mithilfe der komplexen Exponentialfunktion

$$\sin x := \operatorname{Im}(\exp(ix)), \qquad \cos x := \operatorname{Re}(\exp(ix))$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ definieren.

Euler-Formel

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x.$$

Zudem kann gezeigt werden, dass dem Zahlenwert x die Länge des Kreisbogensegments vom Punkt $1 \in \mathbb{E}$ bis zum Punkt $z = \exp(ix) \in \mathbb{E}$ auf dem Einheitskreis $\mathbb{E}$ in der komplexen Ebene entspricht (Abb. 4.2). Hierbei steht $x > 0$ für eine Orientierung des Bogensegments entgegen dem Uhrzeigersinn und $x < 0$ für eine Orientierung mit dem Uhrzeigersinn. Auf diese Weise wird die geometrische Interpretation des Sinus und des Kosinus klar.

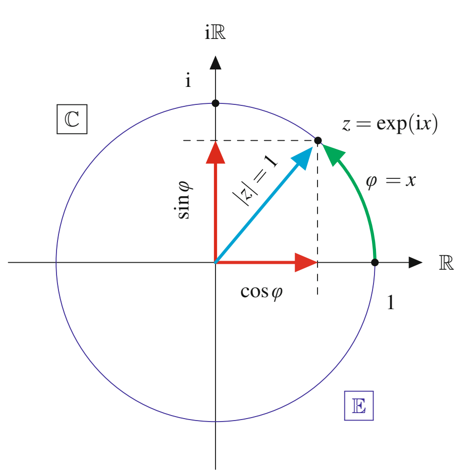


Abb. 4.2 Die Lage von $\exp(ix)$ auf dem Einheitskreis

In der Mathematik ist es üblich, die Bogenlänge x als ein Maß für den Winkel $\varphi := x$ zwischen positiv-reeller Achse und der Verbindungslinie vom Nullpunkt und z zu verwenden. Der Einheitskreis hat den Umfang 2π. Dem Vollwinkel von 360° entspricht daher dieser Wert. Mithilfe des Einheitskreises können wir uns zudem klarmachen, dass die Sinuswerte die Kosinuswerte reproduzieren, wenn man den Einheitskreis um 90° im Uhrzeigersinn dreht, sodass die Imaginärachse horizontal nach rechts zeigt.

Satz: Phasendifferenz zwischen Sinus und Kosinus

Es gilt

$$\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi$$

bzw.

$$\sin(\varphi) = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

für alle Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$.

Der Satz des Pythagoras liefert den folgenden nützlichen Zusammenhang:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1^2 = 1.$$

Zur Vermeidung von Klammern ist es üblich, die etwas verwirrenden Schreibweisen

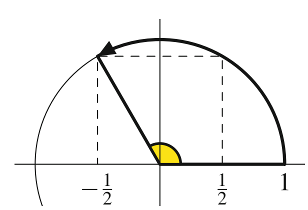
$$\sin^2 x \quad \text{für} \quad (\sin x)^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \cos^2 x \quad \text{für} \quad (\cos x)^2$$

zu verwenden.

In der nächsten Anwendungsbox werden die Sinus- und Kosinuswerte für vier spezielle Winkelsituationen elementargeometrisch bestimmt. Für einen Winkel von $\varphi = 30° = \frac{\pi}{6}$ sind gegenüber der Situation bei 60° Real- und Imaginärteil vertauscht, sodass gilt:

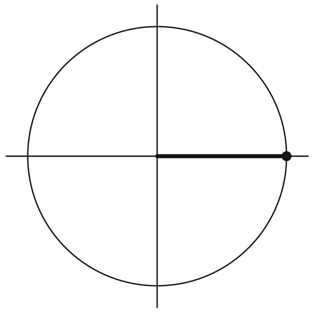
$$\begin{aligned}\sin 30° &= \sin\frac{\pi}{6} = \cos 60° = \frac{1}{2}, \\ \cos 30° &= \cos\frac{\pi}{6} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Alle ganzzahligen Vielfachen der in der Anwendungsbox behandelten Standardwinkel lassen sich auf die dargestellten Situationen zurückführen. So führt beispielsweise ein Winkel von $120° = \frac{2}{3}\pi$ zu einer komplexen Zahl, die gegenüber der 60°-Situation nur an der imaginären Achse gespiegelt ist.



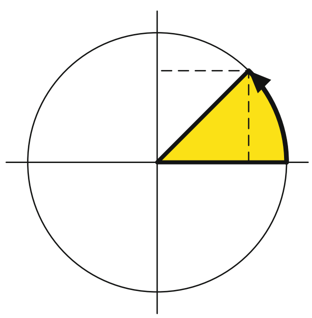
Anwendung: Der Sinus und der Kosinus für Standardwinkel

1. $\varphi = 0°$



Der Winkel beträgt in dieser Skizze $0°$. Der Punkt $z = \exp(\mathrm{i} \cdot 0) = 1$ besitzt den Realteil 1 und den Imaginärteil 0. Daher ist $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$. Diese Werte ergeben sich auch durch das Einsetzen von $x = 0$ in die Reihenentwicklungen (4.10) und (4.11).

2. $\varphi = 45° = \frac{\pi}{4}$

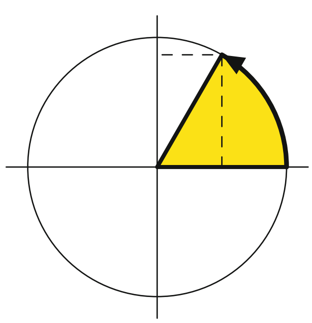


Wir erkennen, dass in dieser Situation die Werte für den Sinus und den Kosinus aus Symmetriegründen übereinstimmen; es gilt also $\sin\varphi = \cos\varphi$. Der Satz von Pythagoras ergibt daher $2 \cdot \cos^2\varphi = 1$, woraus sich unmittelbar

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\varphi$$

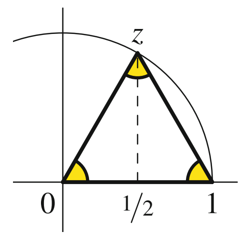
ergibt.

3. $\varphi = 60° = \frac{\pi}{3}$

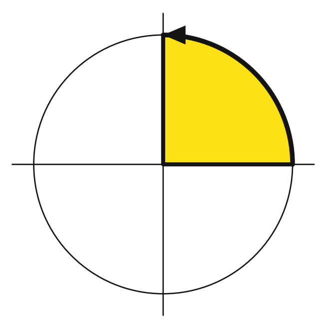


Wir betrachten das Dreieck (s. unten) mit den Ecken 0, 1 und $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Dieses Dreieck hat drei gleich lange Seiten, da die gleich langen Strecken $\overline{01}$, $\overline{0z}$ einen Winkel von $60°$ einschließen. Aus Symmetriegründen schneidet daher das Lot vom Punkt z die reelle Achse im Punkt $\frac{1}{2}$, was dem Kosinuswert entspricht: $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. Es folgt nach Pythagoras:

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



4. $\varphi = 90° = \frac{\pi}{2}$



In dieser Skizze ist $z = \mathrm{i}$. Damit folgt

$$\cos\varphi = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}) = \mathrm{Re}(\mathrm{i}) = 0,$$
$$\sin\varphi = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}) = \mathrm{Im}(\mathrm{i}) = 1.$$

Die Sinusfunktion befindet sich nun in der Situation, in der sich die Kosinusfunktion beim Winkel $\varphi = 0$ befunden hatte. Sie eilt also um die Phasendifferenz $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dem Kosinus hinterher.

Der Sinuswert ändert sich daher nicht; der Kosinuswert bleibt betragsmäßig gleich und wechselt nur das Vorzeichen:

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Auf diese Weise können wir für weitere Standardwinkel als Vielfache dieser Winkel die Werteentwicklung des Sinus und des Kosinus verfolgen. Da die komplexe Exponentialfunktion e^{ix} für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist, sind die Sinus- und Kosinusfunktion ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Wenn nun $x > 2\pi$ gewählt wird, so ist mindestens ein ganzer Umlauf des Vollkreises vollzogen. Wir zerlegen nun eine Zahl $x \geq 0$ in eine Summe bestehend aus dem Anteil $n = \lfloor \frac{x}{2\pi} \rfloor$ des größtmöglichen ganzzahligen Vielfachen von 2π und einem Rest $\varphi = x - 2\pi n$. Die n Umläufe verändern die Werte der Sinus- und Kosinusfunktion nicht, es kommt einzig auf den Rest $\varphi \in [0, 2\pi)$ an. Ähnliches gilt, wenn der Umlaufsinn geändert wird, indem $x < 0$ gewählt wird.

Satz: Periodizität des Sinus und des Kosinus

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sin x = \sin(x + 2\pi k), \quad \cos x = \cos(x + 2\pi k).$$

Die Zahl 2π wird als Periode der komplexen Exponentialfunktion $\exp(ix)$ bzw. des Sinus und des Kosinus bezeichnet.

Der Tangens ist das Verhältnis von Sinus zu Kosinus

Der Kosinus verschwindet genau für $x = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Das Verhältnis zwischen Sinus und Kosinus definiert die Tangensfunktion.

Definition: Tangens

Die für $x \in \mathbb{R}, x \notin \{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definierte Funktion

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

heißt Tangensfunktion oder kurz Tangens.

Die Nullstellen des Tangens sind die des Sinus. Auch für den Tangens gibt es eine Periodizität.

Folgerung (Periodizität des Tangens)
Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}, x \notin \{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\tan x = \tan(x + \pi k).$$

Der Tangens hat die Periode π. ◄

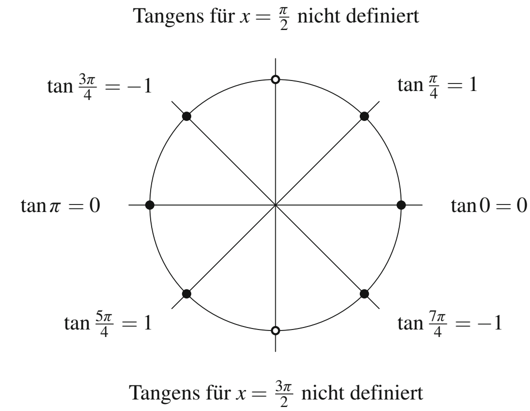


Abb. 4.3 Die Werteentwicklung des Tangens, dargestellt am Einheitskreis

Bei Funktionen mit standardisierter Abkürzung wie exp, sin, cos und tan ist es üblich, die Klammern beim Einsetzen eines Arguments x wegzulassen, wenn Unklarheiten ausgeschlossen sind. Wir haben hiervon bereits mehrmals Gebrauch gemacht. So ist

$$\exp x = \exp(x), \quad \sin x = \sin(x),$$
$$\cos x = \cos(x), \quad \tan x = \tan(x),$$

aber

$$\exp x + y = \exp(x) + y, \quad \sin x + y = \sin(x) + y,$$
$$\cos x + y = \cos(x) + y, \quad \tan x + y = \tan(x) + y.$$

Wir sollten daher die klammerfreie Schreibweise nur in eindeutig interpretierbaren Fällen einsetzen.

Physikalischer Hintergrund

Die reelle Exponentialfunktion wird in den Ingenieur- und Naturwissenschaften sehr oft zur Formulierung von Wachstums- oder Zerfallsprozessen verwendet. Die Sinus- und Kosinusfunktion finden ihre Anwendungen häufig in Schwingungsprozessen. In der Regel fließt eine Zeitangabe t in das Argument dieser Funktionen mit ein.

Diese Zeitangabe wird dabei durch eine anwendungsspezifische Zeitkonstante T in derselben Zeiteinheit wie t dividiert, sodass die Exponential-, die Sinus- oder die Kosinusfunktion auf die jeweilige Anwendung adaptiert wird. Entscheidend ist dabei, dass die Zeitkonstante die Einheiten der Zeitangabe wieder herauskürzt. So beschreibt etwa der Term

$$100 \exp\left(-\tfrac{t}{T}\right) \quad \text{mit } T = 25\,\text{sec}$$

einen exponentiellen Zerfallsprozess, bei dem nach $t = 25\,\text{sec}$ vom Anfangsbestand 100 einer Messgröße noch

$$100 \exp\left(-\tfrac{25\,\text{sec}}{25\,\text{sec}}\right) = \frac{100}{e} \approx 36.8$$

übrig ist. In die Exponentialfunktion wird der Quotient $-t/T$ eingesetzt. Durch den Quotienten aus Zeitangabe und Zeitkonstante ist dieser Quotient einheitenlos (gelegentlich „dimensionslos"). Ähnlich verhält es sich bei Schwingungsprozessen. Der Term

$$A_0 \sin\left(2\pi \tfrac{t}{T}\right) \quad \text{mit } T = 0.02\,\text{sec} = \tfrac{1}{50}\,\text{sec}$$

beschreibt einen Schwingungsprozess, dessen Werte zwischen $-A_0$ und A_0 sinusförmig (harmonisch) pendeln. Dabei wird die Sinusperiode 2π durch den Faktor $\frac{t}{T}$ auf die anwendungsspezifische Periode $T = 0.02\,\text{sec}$ umskaliert. Alle $T = 0.02\,\text{sec}$ kehrt derselbe Wert durch den obigen Ausdruck wieder zurück. Man bezeichnet den Kehrwert $\nu = \frac{1}{T}$ der anwendungsspezifischen Periodendauer T als Freqenz. Der Ausdruck $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ heißt **Kreisfrequenz**. Auch bei Schwingungsprozessen ist darauf zu achten, dass die Zeit t nicht direkt, sondern durch den Quotienten $\frac{t}{T}$ als dimensionslose Größe in die Sinus- bzw. Kosinusfunktion Eingang findet.

Das Vollständigkeitsaxiom beschreibt eine prägende Eigenschaft der reellen Zahlen

Abschließend wollen wir versuchen, die Menge der reellen Zahlen anhand der Grenzwerte bestimmter Folgen zu charakterisieren. Wir haben die reellen Zahlen als Menge aller unendlichen Dezimalzahlen mit periodischem oder nicht-periodischem Nachkommateil eingeführt. Dezimalzahlen, die im Nachkommateil ab einer bestimmten Stelle periodisch sind, gehören zu den rationalen Zahlen. Beispielsweise ist

$$12.43\overline{10587} = \frac{1243}{100} + \frac{10587}{9999900} \in \mathbb{Q}.$$

Für irrationale Zahlen ergibt sich kein wiederholendes Muster ab einer bestimmten Nachkommastelle. Wir haben aber die Möglichkeit, jede irrationale Zahl beliebig genau durch eine rationale Zahl zu nähern. Dies kann beispielsweise dadurch geschehen, indem wir den Nachkommateil einer irrationalen Zahl ab einer bestimmten Stelle streichen. Eine Dezimalzahl x wird auch als 10-adischer Bruch bezeichnet und ist nichts weiter als eine unendliche Reihe:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$

mit $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Man kann beispielsweise zeigen, dass

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309\ldots \notin \mathbb{Q},$$

also keine rationale Zahl ist. Die Ziffernfolge $(a_k)_{k\geq 1}$ der Nachkommastellen

$$(4, 1, 4, 2, 1, 3, 5, 6, 2, 3, 7, 3, 0, 9, \ldots)$$

wird damit aus nicht periodisch wiederkehrenden Werten bestehen. Die Partialsummenfolge der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}$$

konvergiert jedoch gegen den Grenzwert $\sqrt{2} - 1$.

Sie ist damit eine konvergente Folge aus rationalen Zahlen, die nicht gegen einen rationalen Grenzwert konvergiert. Wenn wir versuchen würden, den Grenzwertbegriff nur in der Menge der rationalen Zahlen zu definieren, so hätte dies bei diesem Beispiel den Effekt, dass zwar die Folgenglieder der Partialsummenfolge immer weniger voneinander abweichen würden, sich aber dennoch kein Grenzwert innerhalb von $\mathbb{Q}$ einstellen würde.

Folgen dieser Art gehören zu den *Cauchy-Folgen*. Ihre charakteristische Eigenschaft ist, dass für genügend großen Mindestindex die Folgenglieder beliebig wenig von einander abweichen.

Definition: Cauchy-Folge

Eine Folge $(a_n)_{n\geq m}$ reeller Zahlen heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jdem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$|a_n - a_{n'}| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n, n' \geq n_0,$$

wenn also der Abstand zwischen zwei beliebigen Folgengliedern a_n und $a_{n'}$ für alle $n, n' \geq n_0$ beliebig klein wird, solange n_0 hinreichend groß gewählt wird.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist. Die Umkehrung jedoch müssen wir nun axiomatisch für die reellen Zahlen fordern.

Vollständigkeitsaxiom

Jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert in $\mathbb{R}$.

Im mathematischen Hintergrund 4.2 wird gezeigt, dass beschränkte Teilmengen reeller Zahlen sowohl Infimum als auch Supremum besitzen. Auf dieser Erkenntnis beruht nun das folgende, nützliche Konvergenzkriterium, das wir bereits verwendet haben.

Satz: Konvergenz beschränkt-monotoner Folgen

Jede Folge in $\mathbb{R}$, die beschränkt und monoton ist, konvergiert gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$.

Beweis Es sei zunächst $(a_n)_{n\geq m}$ eine monoton fallende, beschränkte Folge. Da die Wertemenge D von (a_n) beschränkt und nicht leer ist, gibt es es insbesondere ein Infimum von D, das wir mit s bezeichnen wollen. Es ist für jedes $\varepsilon > 0$ der Wert

4.2 Mathematischer Hintergrund: Vollständigkeit der reellen Zahlen

Das Vollständigkeitsaxiom besagt im Prinzip, dass die reellen Zahlen aufgefasst werden können als die Menge der Grenzwerte aller Cauchy-Folgen. Auf dem Vollständigkeitsaxiom basiert der folgende, wichtige Erkenntnis.

Satz

Jede nichtleere nach unten (bzw. nach oben) beschränkte Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum, also eine größte untere Schranke (bzw. ein Supremum, also eine kleinste obere Schranke).

Beweis Wir zeigen diesen Satz zunächst in der Version für nach unten beschränkte Mengen. Es sei also $D \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Weil D nicht leer ist, enthält D eine reelle Zahl b_0. Da D nach unten beschränkt ist, gibt es ein $a_0 \in \mathbb{R}$ mit $a_0 \leq d$ für alle $d \in D$. Das Intervall $I_0 = [a_0, b_0]$ enthält daher mindestens ein Element aus D. Nun verkleinern wir dieses Intervall derart, dass es weiterhin mindestens ein Element von D enthält. Dazu spalten wir I_0 in zwei Hälften auf, indem wir es in der Mitte teilen:

$$I_0 = [a_0, m_0] \cup [m_0, b_0] \quad \text{mit} \quad m_0 = \frac{b_0 + a_0}{2}.$$

Mindestens eines dieser beiden Teilintervalle enthält Elemente aus D. Wenn es bereits das erste Intervall $[a_0, m_0]$ ist, dann betrachten wir dies als Intervall I_1, ansonsten muss das zweite Teilintervall Elemente aus D enthalten, sodass in diesem Fall für I_1 das zweite Teilintervall ausgewählt wird. Mit I_1 verfahren wir genauso: Wir zerlegen es in zwei Hälften und wählen als neues Intervall I_2 die untere Hälfte, wenn sie Elemente von D enthält, ansonsten sei I_2 die obere Hälfte. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge von Intervallen $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, die sich gegenseitig enthalten und deren Intervalllängen sich bei jedem Übergang $I_n \to I_{n+1}$ halbieren.

Jedes Teilintervall $I_n = [a_n, b_n]$ besitzt eine Untergrenze a_n und eine Obergrenze b_n. Wenn es bei der Intervallauswahl zur Bestimmung von I_{n+1} aus I_n zur Auswahl der unteren Intervallhälfte kommt, ändert sich die Untergrenze nicht: $a_{n+1} = a_n$, ansonsten ist die neue Untergrenze um die Hälfte der Intervalllänge I_n höher als a_n, sodass in dieser Situation $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ gilt. Entsprechend gilt für die neue Intervallobergrenze $b_{n+1} = b_n - \frac{1}{2}(b_n - a_n)$, wenn die untere Hälfte von I_n für I_{n+1} ausgewählt wird, während die neue Obergrenze sich nicht ändert, also $b_{n+1} = b_n$ gilt, bei Auswahl der oberen Hälfte.

Daher können wir die Untergrenzen als monoton wachsende Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ interpretieren, während die Obergrenzenfolge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist. Die Konstruktion dieser Teilintervalle stellt sicher, dass jedes Folgenglied der Untergrenzenfolge a_n eine untere Schranke von D ist, während jedes Folgenglied der Obergrenzenfolge in D liegt: $b_n \in D$.

Zusätzlich erhalten wir durch $l_n = b_n - a_n$ eine Intervalllängenfolge, für die aufgrund der fortlaufenden Halbierung gilt: $l_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$.

Sollte nun vom Index $n > 1$ bis zum Index $n' \geq n$ die Untergrenzenfolge sogar *streng* monoton wachsend sein, so gilt

$$\begin{aligned} a_{n'} &= a_n + \tfrac{1}{2} l_n + \tfrac{1}{2} l_{n+1} + \cdots + \tfrac{1}{2} l_{n'-1} \\ &= a_n + \sum_{k=n}^{n'-1} \tfrac{1}{2} l_k \\ &= a_n + \sum_{k=n}^{n'-1} \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2^k}(b_0 - a_0) \\ &= a_n + \sum_{k=n+1}^{n'} \tfrac{1}{2^k}(b_0 - a_0). \end{aligned}$$

Ansonsten ist die rechte Summe ein Maximalwert für $a_{n'}$. Entsprechend gilt für die Obergrenzenfolge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, falls sie vom Index $n > 1$ bis zum Index $n' \geq n$ *streng* monoton fällt:

$$\begin{aligned} b_{n'} &= b_n - \tfrac{1}{2} l_n - \tfrac{1}{2} l_{n+1} - \cdots - \tfrac{1}{2} l_{n'-1} \\ &= b_n - \sum_{k=n}^{n'-1} \tfrac{1}{2} l_k \\ &= b_n - \sum_{k=n}^{n'-1} \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2^k}(b_0 - a_0) \\ &= b_n - \sum_{k=n+1}^{n'} \tfrac{1}{2^k}(b_0 - a_0). \end{aligned}$$

Ansonsten ist die rechte Summe ein Minimalwert für $b_{n'}$.

Wir zeigen nun, dass beide Folgen Cauchy-Folgen sind. Es sei daher $\varepsilon > 0$. Wir betrachten nun für $n' > n$ den Unterschied zwischen den zwei Folgengliedern $a_{n'}$ und a_n:

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n'}| &= a_{n'} - a_n \\ &\leq a_n + \sum_{k=n+1}^{n'} \tfrac{1}{2^k}(b_0 - a_0) - a_n \\ &= (b_0 - a_0) \sum_{k=n+1}^{n'} \tfrac{1}{2^k} \\ &= (b_0 - a_0) \left(\sum_{k=1}^{n'} \tfrac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2^k} \right) \\ &= (b_0 - a_0) \left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^{n'+1}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\ &= (b_0 - a_0) \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n'}} \right) < \varepsilon \end{aligned}$$

für n', n hinreichend groß. Ganz ähnlich können wir für die Obergrenzenfolge argumentieren, indem wir den Unterschied zwischen den zwei Folgengliedern $b_{n'}$ und b_n betrachten,

$$\begin{aligned} |b_n - b_{n'}| = b_n - b_{n'} &\le b_n - \left(b_n - \sum_{k=n+1}^{n'} \tfrac{1}{2^k}(b_0 - a_0) \right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{n'} \tfrac{1}{2^k}(b_0 - a_0) < \varepsilon, \end{aligned}$$

und dabei $b_{n'}$ nach oben gegen $\sum_{k=n+1}^{n'} \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0)$ und damit gegen ε abschätzen.

Aufgrund des Vollständigkeitsaxioms konvergieren beide Folgen. Es seien nun

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

die beiden Grenzwerte. Es ist dann

$$b - a = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2^n}(b_0 - a_0) = 0.$$

Beide Grenzwerte sind daher gleich. Zudem gilt für alle $d \in D$ aufgrund der Konstruktion der Intervalle I_n, dass $a_n \le d$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und daher auch $a \le d$. Für jedes $a' > a$ gibt es aber ein $d \in D$ mit $d < a'$, denn da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine D-wertige Folge ist mit $b_n \to b = a$, gibt es für $a' > b = a$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $b_n < a'$ für alle $n \ge n_0$. Jedes dieser b_n ist in D und liegt unterhalb von a'. Der gemeinsame Grenzwert $a = b$ beider Folgen ist daher das Infimum von D.

Ist D nach oben beschränkt, so ist $-D := \{-d \mid d \in D\}$ nach unten beschränkt und besitzt daher ein Infimum a. Dann ist $b := -a$ Supremum von D, denn es ist $-d \ge a$ für jedes $-d \in -D$ und daher $d \le -a = b$ für jedes $d \in D$. Jedes $a' > a$ ist keine untere Schranke von $-D$ und daher ist $b' := -a' < -a = b$ keine obere Schranke mehr von D. ■

$s + \varepsilon$ kein Infimum mehr für D. Es gibt somit ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $a_{n_0} < s + \varepsilon$. Nun gilt für alle $n \ge n_0$ aufgrund der fallenden Monotonie von (a_n) die Ungleichung $a_n \le a_{n_0}$. Insgesamt folgt somit

$$a_n \le a_{n_0} < s + \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \ge n_0$$

bzw.

$$|a_n - s| \overset{s \le a_n}{=} a_n - s < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \ge n_0.$$

Ist $(a_n)_{n\ge m}$ monoton wachsend, so besitzt nach dieser Argumentation die monoton fallende Folge $(-a_n)_{n\ge m}$ einen Grenzwert und damit auch $(a_n)_{n\ge m}$. ■

So ist beispielsweise die Partialsummenfolge zur Darstellung einer reellen Zahl x als 10-adischer Bruch eine beschränkte, im Fall von $x > 0$ monoton wachsende und im Fall $x < 0$ monoton fallende Folge.

Aufgaben

4.1 Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge beschränkt ist.

4.2 Untersuchen Sie auf Konvergenz:

a) $a_n = \frac{n^2}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$
b) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}, \quad n > 0$
c) $a_n = n \frac{1-n^2}{n^2-n^3}, \quad n > 0$
d) $a_n = n - \frac{1+4n^2}{4n+2}, \quad n \in \mathbb{N}_0$
e) $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1}, \quad n \ge 1, \quad a_0 = 1$ (rekursiv definierte Folge)
f) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \ge 2, \quad a_0 = 1, a_1 = 1$ (Fibonacci-Folge)

4.3 Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in Abhängigkeit vom Wert von $q \in \mathbb{R}$.

4.4 Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n(n+2)+1}$
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-4n^2+7n-2n^2+8n^5-14}{((n-2)^4+2)(2-4n)}$

4.5 *Ein Praxisbeispiel zur Anwendung der Beweisverfahrens der vollständigen Induktion:* Bei Parallelschaltung zweier elektrischer Widerstände R_1 und R_2, $(R_1, R_2 \neq 0)$ ergibt sich der Kehrwert des Gesamtwiderstands aus der Kehrwertsumme beider Einzelwiderstände: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass dann für den Kehrwert des Gesamtwiderstands $R^{(n)}$ bei Parallelschaltung von $n \ge 2$ Widerständen $R_k \neq 0$, $(1 \le k \le n)$ eine entsprechende Formel gilt, d. h.

$$\frac{1}{R^{(n)}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}.$$

b) Für den Gesamtwiderstand bei Parallelschaltung zweier elektrischer Widerstände R_1 und R_2 ergibt sich laut der Kehrwertformel:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{„Produkt durch Summe“}.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass bei Parallelschaltung von $n \ge 2$ Widerständen $R_k \neq 0$, $(1 \le k \le n)$ für die Berechnung des Gesamtwiderstands in Verallgemeinerung folgende Formel gilt:

$$R^{(n)} = \frac{\prod_{k=1}^{n} R_k}{\sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} R_j}.$$

c) Zeigen Sie, dass für beliebige Widerstandswerte R_k, die einen maximalen Schwellwert $R_{\max}$ nicht überschreiten, also $0 < R_k \leq R_{\max}$, $k \geq 1$, die Folge der Gesamtwiderstände $(R^{(n)})_{n\geq 2}$ bei Parallelschaltung von $n \geq 2$ Widerständen R_k, $(1 \leq k \leq n)$ eine Nullfolge darstellt, d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} R^{(n)} = 0$. (Unendlich viele Widerstände parallel geschaltet ergeben den Gesamtwiderstand 0.) Welcher Grenzwiderstand stellt sich ein, wenn die Einzelwiderstände gemäß $R_k = k!$ bzw. $R_k = k$ steigen? Gibt es hierfür eine anschauliche Erklärung?

4.6

a) Untersuchen Sie in Abhängigkeit des Parameters $q \in \mathbb{R}$ das Konvergenzverhalten der *geometrischen Reihe* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$.

b) Zeigen Sie, dass die *harmonische Reihe* bestimmt gegen ∞ divergiert: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$. Klammern Sie hierzu die Partialsummen der harmonischen Reihe auf folgende Weise:

$$s_{2^{n+1}} := \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \\ + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \\ + \left(\sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{1}{k}\right).$$

Schätzen sie die Klammern in geeigneter Weise nach unten ab, um so eine divergierende Minorante zu konstruieren.

4.7 Zeigen Sie mithilfe des Quotientenkriteriums die Konvergenz folgender Reihen:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$

c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$

4.8 Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2x - x^2 - 1)^{2k},$$

und wie lautet im Konvergenzfall der Grenzwert?

4.9 Warum konvergieren die folgenden Reihen, und wie lauten ihre Grenzwerte?

a) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (k^2 - k)}{k!}$

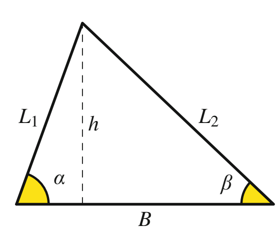
b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2\pi^{2k}}{2^{2k}(2k-1)!}$

4.10 Berechnen Sie mit einer Tabellenkalkulation (TK) unter ausschließlicher Benutzung der arithmetischen Rechenoperationen (+, −, ×, /, Potenzieren, Klammerung) die fünfte Näherung der Exponentialfunktion $\exp(x)$ für folgende Werte von x und vergleichen Sie die Ergebnisse jeweils mit den Werten der eingebauten Exponentialfunktion Ihres Taschenrechners bzw. der Tabellenkalkulation, indem Sie den absoluten und relativen Fehler berechnen (s. Tab.).

x	Näherung von $\exp(x)$ $\sum\limits_{k=0}^{5} \frac{x^k}{k!}$	$\exp(x)$ (TK)	absoluter Fehler $\left\lvert e^x - \sum\limits_{k=0}^{5} \frac{x^k}{k!} \right\rvert$	relativer Fehler in % $100 \cdot \left\lvert \frac{e^x - \sum_{k=0}^{5} \frac{x^k}{k!}}{e^x} \right\rvert$
−3.0				
−2.5				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
6.0				

Wie könnte man sich die im Vergleich zu den Fehlern für $x < 0$ geringere Fehlerentwicklung bei positiven x-Werten auch für verbesserte Näherungen für negative x-Werte zunutze machen?

4.11 Gegeben sei die folgende Konstruktion:



Berechnen Sie bei bekannten Winkeln α und β und gegebener Strecke B die Längen L_1, L_2 sowie die Höhe h. Nutzen Sie hierzu die trigonometrischen Funktionen.

4.12 Vergleichen Sie mithilfe einer Tabellenkalkulation (TK) die Reihennäherungen p_N für die Funktion

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \approx \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = p_N(x).$$

Notieren Sie hierzu die Ergebnisse in einer Wertetabelle folgender Art:

x	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$\sin(x)$ gem. TK
-1.5				
-1.0				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
6.0				

Wie können für große $|x|$ die Reihennäherungen mit möglichst wenig Aufwand verbessert werden?